FOLIA 203

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia VIII (2016)

ISSN 2080-9751

Jan Górowski, Adam Łomnicki

O pewnej implikacji*

Abstract. The purpose of this paper is to show how the process of proving a theorem in different ways or proving generalized versions of the theorem, after learning one its proofs, influences the development of the skills of proving theorems and analysing proofs by the students of mathematics. To illustrate this process we use an elementary theorem about numbers and its generalizations, giving fourteen proofs. Proving theorems we use methods and facts which are available to high school students.

1. O pewnej implikacji

W ostatnich latach w kilku poważniejszych materiałach, kierowanych do nauczycieli matematyki z gimnazjów i szkół ponadgimnazjalnych (Guzicki, 2013), znaleźć można wiele argumentów za tym, że należy uczyć dowodzenia twierdzeń, uczyć analizowania dowodów (trudnych do odkrycia czy tylko zrozumienia, a przecież znanych od setek, a nawet tysięcy lat). Dydaktycy matematyki zawsze podkreślali rozliczne wartości tego celu nauczania matematyki, ale był on bardzo skromnie artykułowany w podstawach programowych tego przedmiotu i programach nauczania, bo „budził strach” u uczniów (a może i nauczycieli).

Zadań problemowych było i jest bardzo mało w większości podręczników i zbiorów zadań. Z naszych doświadczeń nauczycielskich wynika, że dostrzeganie problemów, stawianie hipotez jest aktywnością matematyczną dostępną nawet dla przeciętnie uzdolnionego matematycznie ucznia. Jak pięknie pisze Jarosław Górnicki na okładce książki „Okruchy matematyki”: „Sztuką jest mówić o matematyce w sposób zrozumiały. Sztuką jest dostrzec niebanalny problem. Sztuką jest go rozwiązać „elementarnie” (Górnicki, 1995). Historia matematyki pokazuje, że po postawieniu problemu, po sformułowaniu hipotezy, upływało zwykle kilka (kilkanaście, kilkaset) lat do jej rozstrzygnięcia. Pojawiało się twierdzenie, jego dowód, a nieraz kilka dowodów w różnych częściach świata. Nie martwmy się więc, że nasi

*On some implication

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 39B27, Secondary: 12J15

Key words and phrases: homographic function, inequality

uczniowie z pokorą pochylać się będą nad zadaniami problemowymi, nad zadaniami „na dowodzenie" i „z marszu" nie znajdą rozwiązania.

Bardzo cenne dla wzbogacenia wiedzy i rozwoju umiejętności matematycznych jest analizowanie różnych dowodów tego samego twierdzenia, znanych z literatury (też z Internetu). Przemyślanych materiałów dydaktycznych, ułatwiających realizowanie tego celu nauczania, właściwie nie ma w podręcznikach szkolnych, a nauczyciele - pasjonaci - muszą sami ich szukać (Górowski, Łomnicki, 2012, Kourliandtchik, 2002). Piszemy szukać, bo jeden nauczyciel (matematyk) w krótkim czasie różnych dowodów nie wymyśli. Autor jednego dowodu na ogół nie może się od niego oderwać, dopóki go nie zapomni. A sztuka szybkiego zapominania czeka jeszcze na jej odkrycie. Czasem kilkanaście elementarnych dowodów jednego twierdzenia uzyskiwali dydaktycy matematyki na jakiejś konferencji, prosząc kolegów, by w wolnym czasie zajęli się znalezieniem rozwiązania (rozwiązań) zaproponowanego problemu.

W tym artykule chcieliśmy dać materiał do analizowania różnych dróg rozumowania, do analizowania tekstu matematycznego, do analizowania, które prowadzi też do odkrycia twierdzeń. Materiał ten mógłby być - naszym zdaniem - wykorzystywany w procesie kształcenia przyszłych nauczycieli matematyki, a nawet w szkołach niższych szczebli.

W czasopiśmie Matematyka w kilku artykułach (Bednarek, 2006, Janowicz, 2006) zamieszczono trzy dowody implikacji:

$$\frac{a}{b+c+d} > 1 \ \wedge \ \frac{d}{b+c+a} > 1 \Longrightarrow \frac{a+d}{b+c} < 0, \tag{1}$$

(gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R},\ b+c+d \neq 0, b+c+a \neq 0,\ b+c \neq 0$)
oraz wyrażono nadzieję, że uda się znaleźć prostsze jej uzasadnienie.

W tym artykule podamy kilkanaście innych dowodów implikacji (1).

Przyjmijmy oznaczenie $x := b + c$. Przy nim implikacja (1) jest równoważna implikacji

$$\frac{a}{x+d} > 1 \ \wedge \ \frac{d}{x+a} > 1 \Longrightarrow (a+d)x < 0. \tag{2}$$

W implikacji (2) i w całym artykule pominęliśmy oczywiste założenie, że wyrażenia występujące w tekście mają sens.

Wykażemy najpierw

Lemat 1
Jeżeli $\frac{a}{x+d} > 1$ *i* $\frac{d}{x+a} > 1$, *to* $ad > 0$.

Z założeń wynika, że $a \neq 0$ i $d \neq 0$, więc i $ad \neq 0$.
Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $ad < 0$. Stąd

$$(a > 0 \text{ i } d < 0) \text{ lub } (a < 0 \text{ i } d > 0).$$

Gdy $a > 0$ i $d < 0$, to $x + d > 0$ (bo $\frac{a}{x+d} > 1$), zatem

$$x > -d,\ x > 0,\ x + a > 0,$$

a skoro

$$\frac{d}{x+a} > 1,$$

to

$$d > 0.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że przypadek $a > 0$ i $d < 0$ zajść nie może. Z „symetrii” założeń wnioskujemy, że przypadek $a < 0$ i $d > 0$ też nie może zajść. Tym samym dowód lematu 1 został zakończony.

Przedstawimy teraz kilkanaście dowodów implikacji (2) (jak zaznaczyliśmy równoważnej implikacji (1)), czyli w istocie dowodów następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1
Jeżeli $a, b, x \in \mathbb{R}$, $x + a \neq 0$, $x + d \neq 0$ *oraz* $\frac{a}{x+d} > 1$ *i* $\frac{d}{x+a} > 1$, *to* $(a + d)x < 0$.

W dowodach (I) - (XIII) będziemy korzystali z lematu 1.

Dowód (I). W przypadku $a > 0$ i $d > 0$ oczywiście $a + d > 0$, a z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ dostajemy $x + d > 0$, $x + a > 0$, $x + d < a$ i $x + a < d$. Stąd $x < a - d$ i $x < d - a$ oraz $2x < 0$, $x < 0$, zatem ostatecznie $(a + d)x < 0$.
W przypadku $a < 0$ i $d < 0$ z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ otrzymujemy $x+d < 0$, $x + a < 0$, $a < x + d$ i $d < x + a$. Stąd $x > a - d$ i $x > d - a$, więc $x > 0$, zatem ostatecznie $(a + d)x < 0$.
To kończy dowód twierdzenia 1.

Dowód (II). Przypuśćmy, że $(a + d)x \geq 0$. Z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ otrzymujemy kolejno

$$\frac{ad}{(x+d)(x+a)} > 1, \ \frac{ad}{x^2+(a+d)x+ad} > 1.$$

Ale $(a + d)x \geq 0$ i $ad > 0$, więc

$$\frac{ad}{x^2+(a+d)x+ad} \leq 1.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Dowód (III). Z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ dostajemy $\frac{ad}{x^2+(a+d)x+ad} > 1$. Ale $ad > 0$ (z lematu 1) i $x^2+ad \geq ad$, więc skoro $\frac{ad}{x^2+(a+d)x+ad} > 1$, to $(a+d)x < 0$.

Dowód (IV). W przypadku $a > 0$ i $d > 0$ oczywiście $a + d > 0$, a z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ dostajemy $a > x + d > 0$ oraz $d > x + a > 0$. Stąd $a > x + d > x + (x + a)$, więc $x < 0$ i ostatecznie $(a + d)x < 0$.
W przypadku $a < 0$ i $d < 0$ z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ dostajemy $a < x+d < 0$ oraz $d < x+a < 0$. Stąd $a < x+d < x+(x+a)$, więc $0 < x$ i ostatecznie $(a+d)x < 0$.

Dowód (V). Z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ otrzymujemy $0 < \frac{x+d}{a} < 1$ i $0 < \frac{x+a}{d} < 1$, a stąd kolejno

$$0 < \frac{x+d}{a} + \frac{x+a}{d} < 2,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{d}{a} + \frac{x}{d} + \frac{a}{d} < 2,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{d} < 2 - \left(\frac{a}{d} + \frac{d}{a}\right).$$

Ponieważ $\lambda + \frac{1}{\lambda} \geq 2$ dla $\lambda > 0$ i $\frac{a}{d} > 0$ (to też z lematu 1), to $\frac{x}{a} + \frac{x}{d} < 0$ i $(\frac{x}{a} + \frac{x}{d})ad < 0$. Stąd $(a+d)x < 0$.

Dowód (VI). Z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ dostajemy kolejno:

$$0 < \frac{x+d}{a} < 1 \text{ i } 0 < \frac{x+a}{d} < 1, \frac{x}{a} < \frac{a-d}{a} \text{ i } \frac{x}{d} < \frac{d-a}{d},$$

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{d} < \frac{a-d}{a} + \frac{d-a}{d}, \frac{x}{a} + \frac{x}{d} < \frac{-(a-d)^2}{ad}.$$

Ale $ad > 0$, więc dalej $\frac{x}{a} + \frac{x}{d} < 0$, stąd ostatecznie $(a+d)x < 0$.

Dowód (VII). Z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ otrzymujemy $0 < \frac{x+d}{a} < 1$ i $0 < \frac{x+a}{d} < 1$. Stąd $\frac{(x+d)(x+a)}{ad} < 1$, ale $ad > 0$, zatem $x^2 + (a+d)x < 0$, więc $(a+d)x < 0$.

Dowód (VIII). Z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ dostajemy kolejno:

$$0 < \frac{x+d}{a} < 1 \text{ i } 0 < \frac{x+a}{d} < 1, \frac{\frac{x+d}{a} + \frac{x+a}{d}}{2} < 1,$$

$$\frac{(a+d)x + a^2 + d^2}{2ad} < 1, \frac{(a+d)x + (a-d)^2}{2ad} < 0,$$

ale $ad > 0$, więc $(a+d)x < 0$.

Dowód (IX). Z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ otrzymujemy

$$\frac{x+d}{a} + \frac{x+a}{d} < 2$$

stąd

$$\frac{(a+d)x + (a-d)^2}{ad} < 0.$$

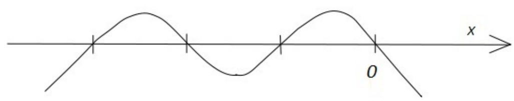
Zatem ostatecznie $(a+d)x < 0$.

Dowód (X). Z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ dostajemy kolejno:

$$\frac{ad}{(x+d)(x+a)} > 1, \frac{ad - (x+d)(x+a)}{(x+d)(x+a)} > 0,$$

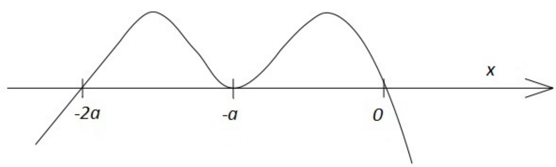
$$\frac{-x^2-(a+d)x}{(x+d)(x+a)}>0, -x(x+a+d)(x+a)(x+d)>0.$$

Potraktujmy ostatni warunek jako nierówność o niewiadomej x; zbiór jej rozwiązań odczytamy ze schematu graficznego.
Gdy $a>0, d>0$ i $a\neq d$ ten schemat jest przedstawiony na rysunku 1.



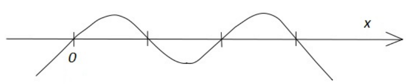
Rys. 1

Gdy $a>0, d>0$ i $a=d$ ten schemat jest przedstawiony na rysunku 2.

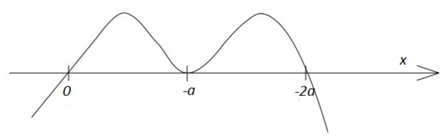


Rys. 2

Pozostałe dwa przypadku (schematy) $a<0, d<0$ i $a\neq d$ oraz $a<0, d<0$ i $a=d$ przedstawione są na rysunkach 3 i 4.



Rys. 3



Rys. 4

Te cztery sytuacje wyczerpują wszystkie możliwości. Zauważamy, że w każdej z rozważonych sytuacji $(a+d)x<0$.

Dowód (XI). Określmy funkcje homograficzne h_1, h_2 wzorami:

$$h_1(x)=\frac{-x+a-d}{x+d}, h_2(x)=\frac{-x+d-a}{x+a}.$$

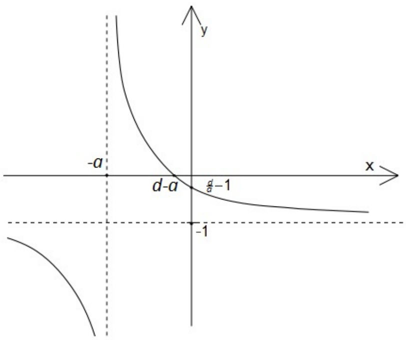
Zauważmy, że układ założeń

$$\frac{a}{x+d}>1 \text{ i } \frac{d}{x+a}>1$$

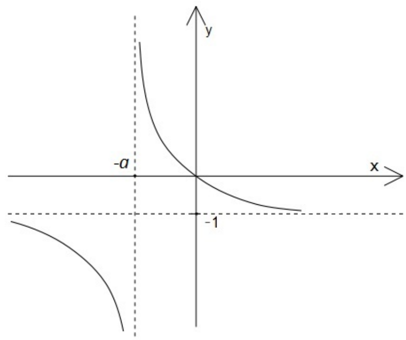
jest równoważny układowi warunków

$$h_1(x)>0 \text{ i } h_2(x)>0.$$

Z lematu 1 wynika, że a i d są tych samych znaków. Nie zmniejszając ogólności rozumowania można przyjąć, że $a \geq d$.
Gdy $a > 0$ i $d > 0$, to szkic wykresu funkcji homograficznej h_2 jest następujący (rys. 5 dla $a \neq d$; rys. 6 dla $a = d$).

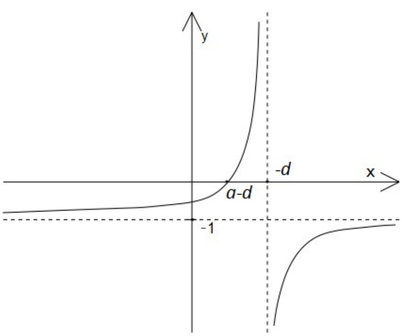


Rys. 5

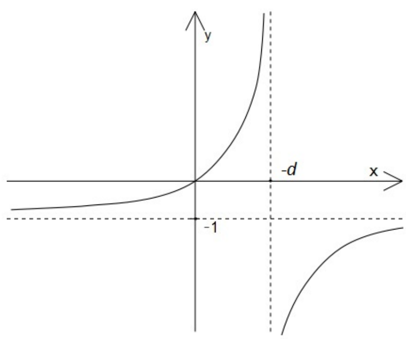


Rys. 6

Z założenia $h_2(x) > 0$ wynika, że $x < 0$, a stąd $(a + d)x < 0$ (ponieważ $a + d > 0$).
Gdy $a < 0$ i $d < 0$, to szkic wykresu funkcji homograficznej h_1 jest następujący (rys. 7 dla $d \neq a$; rys. 8 dla $d = a$):



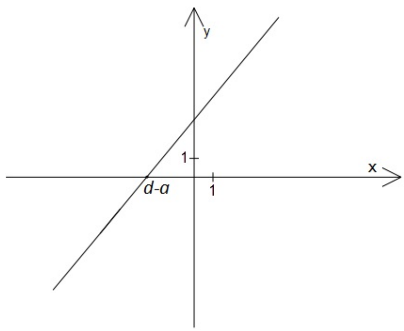
Rys. 7



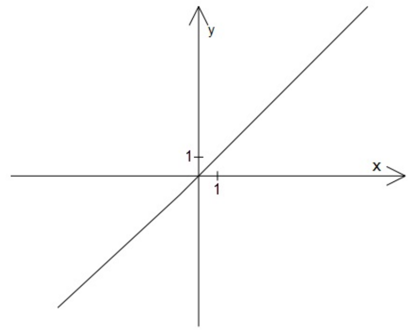
Rys. 8

Z założenia $h_1(x) > 0$ wynika, że $x > 0$, a stąd $(a+d)x < 0$ (ponieważ $a+d < 0$). To kończy dowód twierdzenia 1.

Dowód (XII). Określmy funkcje f i g wzorami $f(x) = \frac{x+a-d}{d}$, $g(x) = \frac{x+d-a}{a}$. Zauważmy, że układ założeń $\frac{d}{x+a} > 1$ i $\frac{a}{x+d} > 1$ jest równoważny układowi warunków $-1 < f(x) < 0$ i $-1 < g(x) < 0$.
Z lematu 1 wynika, że a i d są tych samych znaków. Ze względu na „symetrię" założeń, nie zmniejszając ogólności rozumowania, można przyjąć, że $a \geq d$.
Gdy $a > 0$ i $d > 0$, to szkic wykresu funkcji f jest następujący (rys. 9 dla $d \neq a$; rys. 10 dla $d = a$):

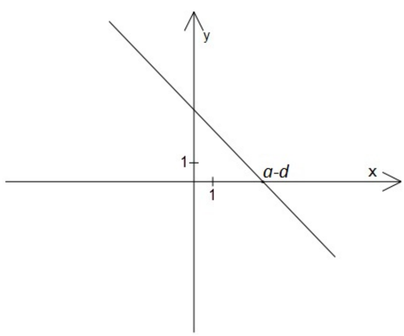


Rys. 9

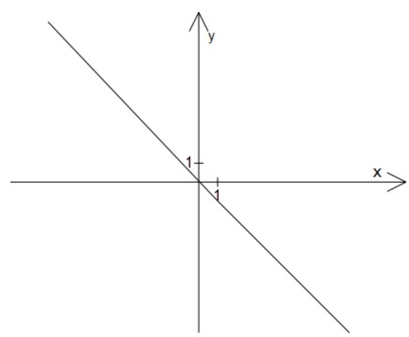


Rys. 10

Z założenia $f(x) < 0$ wynika, że $x < 0$, a stąd $(a + d)x < 0$ (ponieważ $a + d > 0$). Gdy $a < 0$ i $d < 0$, to szkic wykresu funkcji g przedstawiają rysunki 11 i 12 (rys. 11 dla $a \neq d$; rys. 12 dla $a = d$).



Rys. 11



Rys. 12

Z założenia $g(x) < 0$ wynika, że $x > 0$, a stąd $(a + d)x < 0$, ponieważ $a + d < 0$. To kończy dowód twierdzenia 1.

Dowód (XIII). Z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ otrzymujemy $\frac{ad}{(x+a)(x+d)} > 1$, a stąd $\frac{(x+a)(x+d)}{ad} < 1$ lub też $(x + a)(x + d) < ad$ (ponieważ $ad > 0$). Przy oznaczeniu $k(x) = (x+a)(x+d)$ ostatnia nierówność przyjmie postać $k(x) < k(0)$. Szkicując wykres funkcji kwadratowej k w przypadkach:
$i)\, a > 0, d > 0, ii)\, a < 0, d < 0$ wnioskujemy, że skoro $k(x) < k(0)$, to $(a+d)x < 0$.

Dowód (XIV). W tym dowodzie skorzystamy ze znanej i łatwej do uzasadnienia implikacji

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta e \mathbb{R}_+ \frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{\gamma}{\delta} \Longrightarrow \frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} \leq \frac{\gamma}{\delta}. \tag{3}$$

Z założenia $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ otrzymujemy $0 < \frac{x+d}{a} < 1, 0 < \frac{x+a}{d} < 1$. Ponadto a i $x + d$ oraz d i $x + a$ są tych samych znaków. Ze względu na „symetrię” założeń wystarczy rozważyć trzy przypadki:

1. $a > 0$ i $x + d > 0$ i $d > 0$ i $x + a > 0$,
2. $a < 0$ i $x + d < 0$ i $d > 0$ i $x + a > 0$,
3. $a < 0$ i $x + d < 0$ i $d < 0$ i $x + a < 0$.

W przypadku 1. korzystając z (3) oraz założeń mamy

$$0 < \frac{2x + a + d}{a + d} < 1, \text{ a stąd } \frac{2x}{a + d} < 0 \text{ i ostatecznie } (a + d)x < 0.$$

W przypadku 2. z założenia mamy $0 < \frac{-x-d}{-a} < 1, 0 < \frac{x+a}{d} < 1$ i dalej po skorzystaniu z (3): $0 < \frac{a-d}{d-a} < 1$, a więc sprzeczność. Oznacza to, że przypadek 2. zajść nie może.
W przypadku 3. z założeń uzyskujemy $0 < \frac{-x-d}{-a} < 1, 0 < \frac{-x-a}{-d} < 1$.
Korzystając teraz z (3) dostajemy $0 < \frac{-2x-a-d}{-a-d} < 1$, a stąd $\frac{-2x}{-a-d} < 0$. To oznacza, że $(a + d)x < 0$.

Dowód (XV). Zauważmy, że układ warunków $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ jest równoważny układowi

$$0 < \frac{x + d}{a} < 1 \ \text{ i } \ 0 < \frac{x + a}{d} < 1.$$

Stąd otrzymujemy kolejno:

$$\left(\frac{x + d}{a}\right)^2 < 1 \ \text{ i } \ \left(\frac{x + a}{d}\right)^2 < 1,$$

$$\left(\frac{x + d}{a}\right)^2 + \left(\frac{x + a}{d}\right)^2 < 2,$$

$$d^2x^2 + 2d^3x + d^4 + a^2x^2 + 2a^3x + a^4 < 2a^2d^2,$$

$$(a^2 + d^2)x^2 + 2(a^3 + d^3)x < -(a^2 - d^2)^2,$$

$$(a + d)(a^2 - ad + d^2)x < 0,$$

$$(a + d)\left((a - \frac{1}{2}d)^2 + \frac{3}{4}d^2\right)x < 0,$$

$$x(a + d) < 0.$$

Uwaga 1: Analizując dowód XI otrzymujemy

Lemat 2
Jeśli $a > 0, d > 0, a \geq d$, to $\frac{d}{x+a} > 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-a, d - a)$. Jeśli $a < 0, d < 0, a \geq d$, to $\frac{a}{x+d} > 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (a - d, -d)$.

Z lematu 2 wynika wprost implikacja (2).

Uwaga 2: Analizując dowody VI lub VIII lub IX twierdzenia 1 możemy zauważyć, że prawdziwa jest implikacja

$$\frac{a}{x + d} > 1 \text{ i } \frac{d}{x + a} > 1 \Rightarrow x(a + d) + (a - d)^2 < 0 \tag{4}$$

Obserwacja ta prowadzi do następującego wzmocnienia twierdzenia 1.

Twierdzenie 2
Jeśli $\frac{a}{x+d} > 1$ *i* $\frac{d}{x+a} > 1$*, to* $x(a+d) + (a-d)^2 < 0$.

Uwaga 3: Adaptując rozumowanie podane w dowodzie II oraz w dowodzie lematu 1 można uzasadnić następujące implikacje

$$\text{Jeżeli } \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, \frac{a}{\alpha x + d} > 1 \text{ i } \frac{d}{\beta x + a} > 1, \text{ to } x(\alpha a + \beta d) < 0.$$

$$\text{Jeżeli } \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, \alpha\beta \geq 1, \frac{a}{x + \beta d} > 1 \text{ i } \frac{d}{x + \alpha a} > 1, \text{ to } x(\alpha a + \beta d) < 0.$$

Udowodnimy teraz

Twierdzenie 3
Jeżeli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ *i* $\alpha\beta \geq 1$ *oraz* $\frac{a}{x+d} > \alpha$ *i* $\frac{d}{x+a} > \beta$*, to* $(a+d)x < 0$.

Rozumując podobnie jak w dowodzie lematu 1 można uzasadnić, że $ad > 0$. Z założeń $\frac{a}{x+d} > \alpha$ i $\frac{d}{x+a} > \beta$ dostajemy kolejno

$$\frac{ad}{(x+d)(x+a)} > \alpha\beta,$$

$$\frac{ad - \alpha\beta(x^2 + (a+d)x + ad)}{(x+d)(x+a)} > 0,$$

$$\frac{(-\alpha\beta x^2 - ad(\alpha\beta - 1)) - \alpha\beta(a+d)x}{(x+d)(x+a)} > 0.$$

Ponieważ $ad > 0$, to $(x+d)(x+a) > 0$. Istotnie, z założeń $\frac{a}{x+d} > \alpha$ i $\frac{d}{x+a} > \beta$ mamy $\frac{a}{x+d} > 0$ i $\frac{d}{x+a} > 0$, a stąd $(x+d)(x+a) > 0$.
Ponadto
$$-\alpha\beta x^2 - ad(\alpha\beta - 1) - \alpha\beta(a+d)x > 0, \text{ ale } \alpha\beta \geq 1,$$
więc
$$(a+d)x < 0,$$
gdyż
$$-\alpha\beta x^2 - ad(\alpha\beta - 1) \leq 0.$$
To kończy dowód twierdzenia 3.

Uwaga 4: Zauważmy, że założenie $\alpha\beta \geq 1$ w twierdzeniu 3 jest istotne. Dla $\alpha = \beta = \frac{99}{101}$ oraz $a = d > 0$ i $x = 0,01a$ mamy bowiem $\frac{a}{x+d} > \alpha$, $\frac{d}{x+a} > \beta$ i $(a+d)x > 0$.

Uwaga 5: Analizując dowody I lub XI lub XII lub dowód lematu 2 dostajemy

Twierdzenie 4
Jeżeli $\frac{a}{x+d} > 1$ *i* $\frac{d}{x+a} > 1$*, to* $x^2 > (a-d)^2$.

I jeszcze jeden dowód twierdzenia 4.
Z założeń $\frac{a}{x+d} > 1$ i $\frac{d}{x+a} > 1$ dostajemy kolejno:

$$0<\frac{x+d}{a}<1 \text{ i } 0<\frac{x+a}{d}<1,$$

$$\left(1-\frac{x+d}{a}\right)\left(1-\frac{x+a}{d}\right)>0,$$

$$\frac{-x+a-d}{a}\cdot\frac{-x-(a-d)}{d}>0,$$

$$\frac{x^2-(a-d)^2}{ad}>0.$$

Ponieważ $ad>0$ (na mocy lematu 1), to $x^2>(a-d)^2$.
Kończy to dowód twierdzenia 4.
Wstawienie w twierdzeniu 4 w miejsce x sumy $b+c$ daje natychmiast

Twierdzenie 5
Jeżeli $\frac{a}{b+c+d}>1$ *i* $\frac{d}{b+c+a}>1$, *to* $(b+c+a-d)(b+c+d-a)>0$ *oraz* $\frac{b+c+a-d}{b+c+d-a}>0$.

Przeprowadzenie dowodu twierdzenia 5 bez zebrania doświadczeń przy dowodzeniu twierdzenia 1 byłoby - naszym zdaniem - dość trudne.

Literatura

Bednarek, W.: 2006, Prostsze rozwiązanie, *Matematyka* **8**, 464.

Górnicki, J.: 1995, *Okruchy matematyki*, PWN, Warszawa.

Górowski, J., Łomnicki, A.: 2012, Cechy równoboczności trójkątów, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **IV**, 83–92.

Guzicki, W.: 2013, *Rozszerzony program matematyki w gimnazjum. Poradnik nauczyciela matematyki*, Ośrodek Rozwoju Edukacji, Warszawa.

Janowicz, J.: 2006, Oznaczenie ma znaczenie, *Matematyka* **2**, 88–89.

Kourliandtchik, L.: 2002, *Słynne nierówności*, Aksjomat, Toruń, 9–40, 187–206.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail jangorowski@interia.pl
e-mail alomnicki@poczta.fm