FOLIA 110

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia IV (2012)

*Antoni Pardała*

# Współczesne problemy i praktyka kształcenia matematycznego studentów*

**Abstract.** The subject matter of this paper relates to one of the modern research trends in teaching mathematics: ***the problems of quality of mathematical education of pupils and students in the twenty-first century in different countries and cultural traditions***. This analysis throws light on the literature, research results, and observations from the Polish perspective of practice, and outlines the intentions of the range. The work also discusses some theoretical bases for the concept of improving the quality of mathematics and its determinants, as well as new ideas and trends, experiences and difficulties related to the implementations made in this respect in Poland. The author of the paper points out the challenges of work, and current areas of research on improving the quality of education, focusing on math problems and methodologies for monitoring and diagnosing the quality of mathematical education of students, and for designing and implementing the practice of teaching online courses in mathematics and mathematical subjects.

## 1. Wstęp

Kształcenie studentów organizowały i organizują instytucje zwane uniwersytetami bądź szkołami wyższymi o różnym profilu kształcenia, współcześnie nazywane także uczelniami wyższymi. Ewolucję instytucji uniwersytetu, jego koncepcje, paradygmaty i modele poddał wnikliwej analizie historycznej S. Wielgus (2011). Korzenie powstania tej instytucji sięgają Średniowiecza. Wówczas z kościelnych ośrodków nauczania powstały uniwersytety średniowieczne. Ich struktura, metody i zakres nauczania przetrwały aż do XVI wieku, do rozłamu w Kościele katolickim. W kolejnych wiekach ta instytucja ulegała radykalnym zmianom. Dopiero w XIX wieku wyodrębniły się cztery koncepcje modelu uniwersytetu (niemiecka, angielska, amerykańska i francuska). Niemiecki model uniwersytetu nazywany jest współcześnie modelem Humboldta. Na jego kształt zasadniczy wpływ mieli Wilhelm von Humboldt oraz Johann Gottlieb Fichte. Według tej koncepcji uniwersy-

*Contemporary problems of quality of mathematical education of pupils and students

2000 Mathematics Subject Classification. Primary: 97-02, 97D10

Key words and phrases: problems of the quality of mathematical education of pupils and students, current areas of research related to the improvement of quality of mathematical education

tet miał dualną misję, miał się cechować jednością prowadzenia badań naukowych i kształcenia studentów. Jak stwierdza S. Wielgus, wymienione cztery modele uniwersytetu pozostały w XX wieku przy swoich założeniach i misjach, ale przestały być elitarne, co spowodowało lawinowy wzrost liczby studiującej młodzieży. Polskie uniwersytety i szkoły wyższe funkcjonują jeszcze według modelu Humboldta, który szybkimi krokami przechodzi do historii i staje się reliktem przeszłości. Aktualnie powodowane to jest u nas dynamicznym rozwojem gospodarki opartej na wiedzy i przemianami technologicznymi, wzrastającym tempem reform na wszystkich poziomach edukacji i zmianami w funkcjonowaniu szkolnictwa oraz uczelni i instytucji naukowych, a także koniecznością rozwoju przedsiębiorczości akademickiej z udziałem albo bez udziału uczelni (zob. Pregiela 2010). W XXI wieku zaczynają dominować uniwersytety i szkoły wyższe III generacji. Ich misją jest m.in. łączenie działalności dydaktycznej i działalności naukowej z jednoczesnym przekuwaniem uzyskanych znaczących wyników badań na potrzeby rozwoju nauki i kształconej młodzieży, rozwoju gospodarczego i społecznego oraz przedsiębiorczości i innowacyjności. Z tym wątkiem koreluje praca zwarta, której celem było między innymi „opracowanie propozycji podnoszenia jakości kształcenia uniwersyteckiego poprzez doskonalenie procesu dydaktycznego" (Krajewska, 2004, s. 14). Kształtujący się model uczelni III generacji, światowe rankingi uniwersytetów, współczesna ewolucja uczelni wyższych i instytucji edukacyjnych, postęp cywilizacyjny i technologiczny związane są integralnie z modernizacją kształcenia matematycznego studentów i wymuszają potrzebę dbałości o jakość ich kształcenia (zob. Chmielecka 2010; www.qs.com).

## 2. Kształcenie matematyczne studentów w wybranych publikacjach dydaktycznych z XX wieku

Problematyka badawcza dydaktyki szkoły wyższej, w szczególności w zakresie kształcenia matematycznego studentów, jest rozproszona. Wzrost zainteresowania tą problematyką można było dostrzec w środowiskach matematyków i dydaktyków matematyki, w krajowych i międzynarodowych towarzystwach matematycznych pod koniec XX wieku. Wcześniej rzadko były podejmowane opracowania monograficzne bądź publikacje naukowe dotyczące szczegółowych zagadnień kształcenia matematycznego studentów matematyki bądź innych kierunków studiów (np. zob. Polya, 1964; 1975; Halmos, 1976; Кудрявцев, 1985; Krygowska, 1984; 1989; Гнеденко, 2004; Moszner, 2004; Ciosek, 2005; Pardała, 2006 i inni). Opracowanie niektórych problemów kształcenia matematycznego studentów można znaleźć m.in. w czasopismach: *Educational Studies in Mathematics*, *Математика в вышем образовании*, *Wiadomości Matematyczne*, *Dydaktyka Matematyki* bądź w pracach zbiorowych czy też w sprawozdaniach z konferencji naukowych lub badań naukowych (np. zob. Czajkowska, Treliński, 2006). W artykule zawartym w tej pracy syntetycznie scharakteryzowałem światowe tendencje w kształceniu matematycznym na przełomie XX i XXI wieku z trzech perspektyw: 1) pewnych dokumentów prognostycznych, np. opracowanych przez CIEAEM, 2) ewolucji standardów kształcenia dla szkolnej matematyki w różnych krajach, 3) aktualnej koncepcji podnoszenia jakości kształcenia matematycznego na poziomie szkolnym i akademickim (zob. Pardała, 2006). Takie spojrzenie pozwoliło mi wyróżnić, uporządkować i zanalizować nowe tendencje w kształceniu matematycznym. Przez *nowe tendencje w kształceniu matematycznym* rozumiem innowacyjne stanowiska programowe, merytoryczne, dydaktyczne, ewaluacyjne i inne wypracowywane przez międzynarodowe, regionalne i krajowe środowiska matematyków, dydaktyków matematyki, nauczycieli matematyki oraz skierowane na trwałe podniesienie poziomu tego kształcenia. W analizie dopuszczałem spojrzenie „od wewnątrz" na korzenie i źródła oraz aspekty tych nowych tendencji, ale również „od zewnątrz", czyli z pozycji pozaszkolnych i pozauczelnianych ich uwarunkowań, opracowanych z udziałem lub we współdziałaniu z innymi środowiskami.

Obecnie przypomnijmy i zwróćmy uwagę na te ujawnione nowe tendencje z perspektywy pewnych zagranicznych publikacji i dokumentów prognostycznych. Jednym z nich jest dokument: *50 lat CIEAEM: Gdzie jesteśmy i dokąd zdążamy – Manifest 2000 na Rok Matematyki* (zob. tł. Turnau 2000). Autorzy tego dokumentu wskazują kluczowe pytania i idee oraz omawiają perspektywy dotyczące kształcenia matematycznego. Na przykład wyróżniają tendencje typu wyzwania przyszłości i przewodnie zadania, a mianowicie: 1) rozwijanie matematyki dla wszystkich i upowszechnianie znajomości matematyki, 2) przewartościowanie celów kształcenia ogólnego od uniwersalnego kształcenia dla elity do kształcenia dla wszystkich, 3) odzyskanie świadomości i poparcia społeczeństwa demokratycznego dla preferowania kształcenia matematycznego, 4) modernizowanie bazy kształcenia matematycznego z uwzględnieniem jego uwarunkowań we współczesnym zmatematyzowanym świecie. Wymienione w tym dokumencie tendencje implikują zmiany w koncepcji kształcenia matematycznego i jego misji, które powinny: 1) zapewnić zrozumienie procesów „matematyzacji" społeczeństwu, 2) tworzyć jasny i krytyczny osąd na temat roli jaką odgrywa obecnie matematyka i stosowanie jej w warunkach społecznych. Dalej autorzy tego dokumentu stawiają pytania konkretyzujące problematykę wyróżnionego obszaru badawczego. Oto niektóre z nich: 1) W jaki sposób nauczanie i uczenie się matematyki może być prezentowane nie tylko jako wprowadzenie do pewnych wielkich idei naszej kultury, ale również do krytyki tych idei i stosowania ich? 2) Jaki rodzaj badań w dydaktyce matematyki mógłby przyczynić się do stworzenia nowego spojrzenia na praktykę kształcenia matematycznego?

Matematyka w dalszym ciągu jest jednym z tych przedmiotów, który wywołuje silne uczucia obawy, awersji i niekompetencji; a dla większości uczniów i studentów jest trudna i pozbawiona sensu. Stąd uważają się oni za „upośledzonych umysłowo" w tej dziedzinie i skazanych na porażkę. Jednocześnie matematyka nadal kojarzy się uczniom i studentom, ich rodzicom i politykom z posiadaniem szczególnych uzdolnień i oni uważają ją za dyscyplinę dla wybranych. Stąd „zdolności matematyczne", czy też „talent matematyczny", „naturalną zdolność" do myślenia matematycznego, „naturalne zainteresowanie" matematyką postrzegane są jako rzadkość w populacji uczniów i studentów, a ogólnie w społeczeństwie. To czyni z matematyki naturalny środek społecznej selekcji, co niewątpliwie potęguje wzrost niechęci i niepokoju w stosunku do tego przedmiotu szkolnego i do tej nauki.

W tym kontekście warto przypomnieć, że pod egidą ICMI odbyła się konferencja Dubna'2000 na temat: *Matematyka i społeczeństwo. Kształcenie ma-*

*tematyczne na granicy wieków,* której celem było wypracowanie koncepcji: 1) kształcenia matematycznego i poprawy jego jakości w Federacji Rosyjskiej, 2) podniesienia poziomu kształcenia matematycznego zgodnie z duchem czasu kolejnego stulecia. Znany rosyjski matematyk profesor W. M. Tichomirow w wykładzie wygłoszonym na tej konferencji stwierdził między innymi, że: 1) *matematyka zawsze była nieodłączną i istotną częścią ludzkiej kultury, ona staje się kluczem do poznania otaczającego nas świata, podstawą naukowo-technicznego rozwoju i ważną składową rozwoju jednostki; 2) matematyczne wykształcenie jest dobrem, do którego ma prawo każdy człowiek, i obowiązkiem społeczeństwa jest stworzyć każdej jednostce możliwość skorzystania z tego prawa* (zob. Тихомиров, 2000, s. 3). Kluczową kwestią tego forum naukowego było wyeksponowanie rosyjskiego stylu nauczania matematyki i zadań na przyszłość, a w szczególności: a) utrzymywanie kształcenia matematycznego na najwyższym poziomie, które powinno służyć przygotowaniu młodzieży i kształceniu kadr dla potrzeb rozwoju gospodarczego i społecznego, zdolnych do rozwiązywania współczesnych problemów, które stoją przed krajem i ludzkością w XXI wieku; b) doskonalenie i rozwijanie matematycznych olimpiad, konkursów, konferencji dla młodzieży szkolnej i studenckiej, by przynosiły nadal znaczące sukcesy w ich rozwoju matematycznym oraz rywalizacji krajowej i zagranicznej w zakresie efektów kształcenia matematycznego. W Federacji Rosyjskiej ugruntowane są tradycje i wypracowane zasady dotyczące jakości kształcenia matematycznego studentów w uniwersytetach i ośrodkach akademickich Federacji Rosji (zob. Антонов, 2010), oraz zabiegi związane z poznaniem i propagowaniem historii oraz światowego znaczenia rosyjskiego nauczania matematyki (zob. Karp, Vogeli 2010). Jednocześnie ich dumą są czasopisma o dużej renomie: *Математика в школе*, *Математическое образование*, *Квант* i *Газета математика*, które wspomagają pracę nauczycieli matematyki i uczniów zainteresowanych matematyką. Warto też dodać, że w Federacji Rosyjskiej od 2003 roku wydaje się, corocznie po jednym tomie, specjalistyczne czasopismo naukowe *Математика в высшем образовании*, poświęcone tylko problemom nauczania matematyki w szkole wyższej. W skład kolegium redakcyjnego tego czasopisma wchodzą najwybitniejsi przedstawiciele ze świata naukowego matematyki i dydaktyki matematyki Rosji. Na przykład, tom 4 z 2006 roku otwiera rozdział *Treści i technologie kształcenia matematycznego w szkole wyższej,* a w nim autorzy artykułu pt. *O geometrycznym kształceniu matematyków w klasycznych uniwersytetach* postulują, aby nie dopuszczać do „rozpylenia" geometrycznego kształcenia studentów w ramach algebry, analizy matematycznej i matematyki dyskretnej. W konkluzji wnioskują wprowadzenie zmian w treściach i strukturze obowiązującego standardu z matematyki dla szkół wyższych oraz wyodrębnienie i wprowadzenie oddzielnego przedmiotu *geometria* przy zachowaniu dotychczasowego zakresu treści wymienionego standardu. W rozdziale *Matematyka dla specjalistów różnego profilu* opublikowany jest artykuł pt. *Nauczanie problemowe matematyki wyższej w uczelniach technicznych,* którego autorka omówiła syntetycznie historię tego nauczania i podała przykłady sytuacji problemowych w realizacji treści kursu matematyki wyższej z wykorzystaniem komputera przez studentów. Kolejny rozdział *Nowa literatura dydaktyczna z matematyki dla szkół wyższych* zapoznaje czytelnika z wydanym w Szwecji po angielsku podręcznikiem: *Praktyczny kurs rów-*

*nań różniczkowych i matematycznego modelowania* autorstwa И. Х. Ибрагимова oraz recenzją podręcznika: *Podstawy stosowanego rachunku prawdopodobieństwa i statystyki* autorstwa M. А. Федоткина. W omawianym czasopiśmie publikują również swoje prace zagraniczni matematycy i dydaktycy matematyki.

Z problematyką rozważaną w tej części opracowania mają związek wyniki z realizacji projektu badawczego *The Mathematics Education into 21$^{st}$ Century Project,* w ramach którego zorganizowano międzynarodową konferencję naukową na temat: *New Ideas in Mathematics Education*, w Palm Cove'2001 w Australii. Pewne światło na jakość kształcenia matematycznego rzuca także dokument prognostyczny *Dwunaste Studium ICMI: Perspektywy nauczania i uczenia się algebry. Wprowadzenie do dyskusji,* który był pokłosiem dyskusji naukowej przed rozpoczęciem konferencji odbytej w Melbourne'2001 w Australii (2000). Z tego studium wyłaniają się dwa kluczowe zamierzenia: 1) sformułowanie syntezy wiedzy dotyczącej minionej praktyki oraz aktualnych poglądów na nauczanie i uczenie się algebry, by móc określić kierunki pracy badawczej w tej dziedzinie, 2) sformułowanie kierunków unowocześnienia praktyki nauczania i uczenia się algebry szkolnej i uniwersyteckiej. Z kolei analiza dokumentu, The World Federation of National Mathematics Competitions, pt. *Areas to be covered in the study*, a szczególnie proponowanych zagadnień badawczych, wskazuje na potrzebę **diagnozowania jakości kształcenia matematycznego** we wszystkich jego uwarunkowaniach i aspektach, formach i obszarach (zob. www.amt.canberra.edu.au\wfnmcpol02.html).

## 3. Pojęcie jakości kształcenia matematycznego studentów, cel i pytanie badawcze oraz metodologia pracy

Zarówno w świecie, jak i w Polsce wnikliwie analizuje się korzyści, ujawnione skutki i braki wprowadzonych ostatnio zmian edukacyjnych i reform kształcenia matematycznego, dyskutuje się i dokonuje ich korekty oraz organizuje badania jakości kształcenia w polskich szkołach i uczelniach (zob. Marciniak, 2009). Temat tej pracy dotyczy jednego ze współczesnych nurtów badawczych dydaktyki matematyki, który określam jako: **kształcenie matematyczne studentów – tradycje i praktyka, problemy i innowacje, kierunki modernizacji.** Jej problematyka jest pewnym przedłużeniem wcześniejszej pracy autora (zob. Pardała, 2010). Metodologia opracowania tego tematu oparta jest na analizie adekwatnie dobranej współczesnej literatury z dydaktyki matematyki i dokumentów dotyczących reformy edukacji, która pozwoli na podjęcie próby zarysowania podstaw teoretycznych badania jakości kształcenia oraz sformułowania wniosków dla jej poprawy. Ma również charakter *case study* doświadczeń autora i współpracowników z praktyki kształcenia matematycznego studentów informatyki oraz studentów kierunku matematyka specjalności nauczycielskiej – przyszłych nauczycieli matematyki i informatyki. **Celem badawczym** pracy jest wskazać, przybliżyć i opisać uwarunkowania jakości kształcenia matematycznego studentów. W pracy próbuje się znaleźć odpowiedź na **pytanie badawcze:** jakie są źródła i stan wiedzy o reformach i jakości współczesnego kształcenia matematycznego studentów oraz perspektywy na jutro?

Z precyzyjnym zdefiniowaniem jakości kształcenia są trudności, a jego złożoność „wskazuje na potrzebę prezentacji sposobów jej wyrażania, rodzajów, a także struktury" (zob. Krajewska, 2004, s. 189). I dalej autorka stwierdza, że badacze pojęcia ***jakość kształcenia w szkole wyższej*** próbowali scharakteryzować je na wiele sposobów: *jakość jako perfekcja lub zgodność*, bądź *jako transformacja uczących się,* bądź *jakość ujmowana w stosunku do wyników i warunków kształcenia* (s. 193-194). Pojęcie jakości kształcenia również analizowane jest w literaturze w węższym sensie, jako efektywność kształcenia, np. w ujęciu K. Denka (1983) jako funkcja wielu zmiennych niezależnych tego procesu, w tym także czynnika czasu.

Natomiast ***kształcenie matematyczne studentów*** będę rozumieć jako działanie i współdziałanie uczestników tego procesu (nauczyciela matematyki i grupy studentów) realizowane w określonych warunkach i wykorzystujące dostępne metody i środki dydaktyczne, które powodują osiągnięcie przez nich określonych wyników, efektów tego kształcenia. A ***jakość kształcenia matematycznego studentów***, po danym module dydaktycznym dotyczącym realizowanego przedmiotu matematycznego bądź przedmiotów matematycznych w formie wykładów, ćwiczeń, zajęć seminaryjnych lub laboratoryjnych, bądź po zakończonym etapie tego kształcenia albo po zrealizowaniu zaplanowanych praktyk studenckich, będę utożsamiać z ***efektami tego procesu ich kształcenia***. To znaczy, będzie to ich wiedza i umiejętności matematyczne oraz kompetencje personalne i społeczne, które studenci zdobyli w czasie jego trwania i będą je znać, rozumieć i umieć wykonać po zakończeniu pewnego okresu tego ich kształcenia (zob. Chmielecka, 2010, s. 112). Przy czym ***efekty kształcenia matematycznego studentów***, w wąskim zakresie ich osiągnięcia, będę próbował analizować z perspektywy: co oni nauczyli się i co wiedzą, co rozumieją i co umieją zastosować np. z danego przedmiotu matematycznego po zrealizowaniu pewnego bądź całego jego modułu dydaktycznego, czyli po zakończeniu tego procesu kształcenia w pewnym okresie czasu. Obecnie MNiSzW inicjuje dyskusję w środowiskach akademickich nad autonomią programową uczelni i koncepcją wielopoziomowego definiowania efektów kształcenia studentów. W szczególności proponuje się, aby poziomy kwalifikacji dla studentów matematyki były ściśle skorelowane z efektami kształcenia (ich wiedzą i umiejętnościami, kompetencjami personalnymi i społecznymi, które będą finalnym rezultatem odpowiednio na studiach matematycznych I, II bądź III stopnia) szczegółowo opisanymi dla obszaru nauk ścisłych i które określone są przez Krajowe Ramy Kwalifikacji dla szkolnictwa wyższego (zob. Chmielecka, 2010, s. 17, 41-44).

W podsumowaniu pracy przedstawia się refleksje końcowe dotyczące wykonanego studium literatury, wskazanych i analizowanych przykładów, problemów z praktyki kształcenia matematycznego studentów oraz wskazuje się wyzwania i aktualne problemy badawcze tego kształcenia. Zanim to nastąpi skierujmy naszą uwagę na pewne uwarunkowania praktyki kształcenia matematycznego studentów, które rzucają się cieniem na jego jakość.

## 4. Uwarunkowania praktyki kształcenia matematycznego studentów

Zjawisko upowszechnienia studiów spowodowało wzrost liczby studiującej młodzieży, któremu niejednokrotnie towarzyszyło obniżenie wymagań kadry nauczającej i poziomu nauczania tej młodzieży. Konieczność rozwoju współczesnych państw i społeczeństw wymaga kształcenia odpowiedniej liczby kadr z wyższym wykształceniem, np. inżynierskim, informatycznym i innym. Bowiem w Europie Zachodniej, ale również w Polsce, pewne zawody inżynierskie zaczynają być deficytowe. Aby sprostać temu wyzwaniu, trzeba mieć świadomość istotnego problemu na styku szkoły średnie a wyższe uczelnie. Bowiem stwierdzany jest wyłom w edukacji matematycznej, czyli zjawisko luki między szkolną i akademicką matematyką, które znane jest w wielu krajach świata. Ten problem ujawnia się dość wyraziście w toku kształcenia matematycznego studentów I roku studiów (zob. Pardała, 2004). Dla niektórych z nich przejście ze szkoły średniej na uczelnię jest szokującym i przykrym doświadczeniem powodowanym ujawnionymi brakami i niewiedzą ze szkolnej matematyki. Także one są przyczynami napotykanych trudności z opanowaniem realizowanych treści z programu akademickiej matematyki. W ślad za tym efekty tego kształcenia nie są dla nich zadowalające. Potwierdza to sprawność zaliczania egzaminu z matematyki na I roku studiów, która waha się wokół 50%. W większości polskich uczelni technicznych, z powodu słabej znajomości matematyki, rezygnacje studentów i odsiew po I roku studiów wahają się od 30% do 50% (zob. Krysiński, 2007). Jestem przekonany, że ten stan może niewątpliwie zmienić, ale nie od zaraz tylko w dłuższej perspektywie czasu, powrót do obowiązkowej matury z matematyki, co też stało się już w 2010 roku. Z tą tezą, mocno artykułowaną m.in. przez Polskie Towarzystwo Matematyczne, koreluje stanowisko autorów komentarza do nowej podstawy programowej przedmiotu matematyka, która wchodzi do liceum w roku szkolnym 2012/2013 (zob. jej tom 6 na stronie 76). Oto co piszą jej autorzy: *Opory, jakie u wielu młodych ludzi budzi matematyka, wynikają często z braku zainteresowania, bliższego kontaktu, niepodejmowania próby przezwyciężenia choćby niewielkich trudności matematycznych. Obowiązkowa matura wymusi opanowanie podstawowych umiejętności (działania na ułamkach, najprostsze przekształcenia algebraiczne), na których brak powszechnie narzekają wykładowcy wyższych uczelni.*

Na potrzebę, aktualność i ważność badania jakości kształcenia matematycznego studentów wskazuje także diagnoza sformułowana w raporcie *Tackling the Mathematics Problem* przygotowana przez Institute of Mathematics and its Applications, the London Mathematical Society and the Royal Statistical Society. Autorzy badania tego problemu stwierdzają między innymi: *to nie jest właśnie przypadek, że wielu studentów jest gorzej przygotowanych, a wiele ich „wysokich osiągnięć" dotyczy poważnych braków w fundamentalnych pojęciach matematyki.* I w tym raporcie wyrażają stanowczy niepokój środowiska akademickiego matematyków, naukowców i inżynierów ***o matematyczną gotowość studentów I roku*** (zob. www.1ms.ac.uk/policy/tackling/report.html). Z tą diagnozą korelują również spostrzeżenia N. Woolcock (2008) w artykule *Matematyczne nieuctwo się mści,* która odwołuje się do raportu z egzaminu GCSE (General Certificate of Secondary Education) z matematyki, to jest egzaminu państwowego brytyjskich uczniów w wieku 14-16 lat. I przytacza krytyczne i stanowcze opinie autorów tego raportu: *obniżanie standardów kształcenia zagraża przyszłości gospodarki, ludzie powinni się wstydzić swojego analfabetyzmu matematycznego, a nie szczycić się nim, jak to ma miejsce obecnie.* Analogiczne są objawy problemu matematycznej gotowości polskich studentów I roku, co ujawniają także uczestnicy ogólnopolskich konferencji, bądź uczestnicy dyskusji w różnych kręgach na temat stanu nauczania matematyki w szkołach i uczelniach wyższych. Na przykład, A. Dąbrowicz-Tlałka (2004) z Politechniki Gdańskiej na konferencji Brenna'2004 stwierdziła między innymi: *od kilku lat obserwujemy obniżanie się poziomu wiedzy studentów rozpoczynających naukę. Zmniejsza się zakres materiału jaki mają do opanowania maturzyści. Część młodzieży jest nieprzygotowana do podjęcia systematycznej pracy, jaką jest studiowanie. [...] Obecny poziom matury nie gwarantuje, że przyszły student posiada wiedzę i umiejętności w zakresie matematyki i fizyki na poziomie umożliwiającym studiowanie i szczęśliwe ukończenie studiów.*

Również J. Rachoń (2009), w wystąpieniu na otwarcie II seminarium **Bez matematyki kariery nie zrobisz**, zorganizowanego 17 III 2009 roku w Politechnice Gdańskiej, wyraził zatroskanie o studentów, ich kształcenie matematyczne i niepokój o poziom kształcenia matematycznego uczniów i młodzieży szkolnej oraz krytycznie odniósł się do stosowanej przez wielu nauczycieli metodyki pamięciowego nauczania matematyki. Jego zdaniem, ta metodyka jest jedną z przyczyn niepokojącego zjawiska, które ma wymiar społeczny. Coraz mniejsze jest zainteresowanie matematyką, coraz mniej uczniów i młodzieży rozumie matematykę i jednocześnie uważa ten przedmiot za trudny lub bardzo trudny. W ślad za tym stwierdza się u nich brak zainteresowania podejmowaniem tych kierunków i specjalności studiów, na których jest przedmiot matematyka bądź są przedmioty matematyczne, co stoi w sprzeczności z aktualną potrzebą zwiększenia liczby studentów na tych kierunkach.

Niezależnie od wymienionych powodów niepokoju o matematyczne przygotowanie studentów trzeba stwierdzić i mieć świadomość, że te ich matematyczne braki, luki i trudności są specyficzne dla poznawanej i rozwijanej matematyki oraz rozwoju ich matematycznego myślenia. W skali makro mocno artykułuje się użyteczny charakter matematyki, podobnie jak informatyki stosowanej. I wskazuje się na zastosowania matematyki, na jej ciągle postępujący wpływ przy rozwiązywaniu problemów współczesnego świata, na przykład z działów biznesowych: komunikacja i media, przemysł i sektor publiczny, ubezpieczenia, bankowość, nanotechnologie. Trudno nie dostrzegać znaczenia matematyki, kształcenia matematycznego i kultury matematycznej kadr dla potrzeb dalszego rozwoju gospodarczego państw i rozwoju intelektualnego społeczeństw we współczesnym świecie. Matematyka jest niekwestionowanym fenomenem ogólnoświatowej kultury, w której odbija się historia rozwoju ludzkiej myśli, fenomenalnych osiągnięć człowieka. Niektóre z nich wdrożono także do procesu kształcenia matematycznego uczniów i studentów. Internet, komputery, technologie informacyjne (TI) i inne techniczne środki wspomagają tradycyjne metody percepcji poznawanych treści kształcenia, a także metody matematycznego modelowania zjawisk i problemów. Wyniki badań potwierdzają, że nowoczesne środki wizualizacji zwiększają skuteczność procesu edukacyjnego i nie powinny być zagrożeniem dla tradycyjnych metod kształcenia matematyczno-przyrodniczego (zob. Arzarello, 2005). Jednocześnie, zgodnie z odkryciem R. Sperry'ego czynnościowej asymetrii półkul mózgowych, praktyka kształcenia matematycznego uczniów i studentów powinna harmonijnie wykorzystywać możliwości lewej i prawej półkuli mózgowej. W przeciwnym przypadku, może to rodzić ograniczanie kształcenia ich pamięci i motywacji do uczenia się, a także dyskredytowanie matematycznych uzasadnień, gdy komputer i Internet będą ich jedynym „autorytetem" i zdominują ich kształcenie. I choć faktem jest niekwestionowany wzrost zainteresowania młodzieży możliwościami TI, to nie zawsze przekłada się to na wzrost ich zainteresowania matematyką i poprawę efektów uczenia się matematyki. Z drugiej strony, niski poziom umiejętności matematycznych i minimalistyczna postawa młodzieży wobec przyswajania wiedzy z matematyki powoduje spadek ich zainteresowania i brak motywacji do podejmowania studiów na kierunkach matematyczno-przyrodniczych i technicznych. Temu zjawisku towarzyszą w wielu krajach świata i w Polsce niepokojące trendy i dylematy, które muszą martwić nie tylko środowiska akademickie. Uczniowie i studenci uczą się coraz mniej i coraz gorzej matematyki, stąd potrzeba permanentnej dbałości o jakość ich kształcenia matematycznego.

W dalszej części zwrócimy naszą uwagę na dalsze uwarunkowania kształcenia matematycznego studentów z perspektywy wyników badań PISA i TDS-M oraz przywrócenia obowiązkowej matury z matematyki w zakresie podstawowym.

## 5. Kształcenie matematyczne studentów z perspektywy „nowej rewolucji maturalnej"

Edukacja matematyczna, jak każda sfera działalności człowieka w społeczeństwie, ulegała i ulegać będzie przemianom i modernizacji, które powodowane są u nas wdrażaniem Procesu Bolońskiego, wzrostem aspiracji młodzieży i społeczeństwa, potrzebami rozwoju gospodarki narodowej, koniecznością przemian technologicznych i budową społeczeństwa opartego na wiedzy (zob. Marciniak, 2008; 2009). W wielu państwach świata ten kierunek myślenia i ta idea znajduje zróżnicowanie w konkretyzacji i opisie współczesnych koncepcji kształcenia matematycznego oraz przyjętych standardów edukacji matematycznej uczniów i studentów. To zróżnicowanie rzutuje na praktykę ich kształcenia i na osiągane przez nich efekty. Na przykład, widać to w kolejnych edycjach badań międzynarodowych Programu Międzynarodowej Oceny Umiejętności Uczniów (Programme for International Student Assessment, PISA). Wśród uczniów z UE polscy uczniowie w pierwszej edycji tego badania w 2000 roku byli w ogonie Europy, a w 2009 roku poprawili swoje wyniki, zajmując piąte miejsce w czytaniu, siódme miejsce w naukach przyrodniczych. Natomiast z matematyki pozostali na tym samym jedenastym miejscu, jak w 2000 roku, i wyprzedzili m.in. Irlandię, Włochy, Hiszpanię i USA. Przy czym 20,5% polskich uczniów osiąga wynik poniżej minimum, co rzuca się cieniem na jakość nauczania matematyki w Polsce. Zmniejszył się także u nas odsetek uczniów najsłabszych, ale odsetek najlepszych uczniów nadal nie jest porównywalny z innymi najlepszymi krajami, jak np. Finlandia (zob. Legutko, 2006; Pacewicz 2011).

Z drugiej strony, współczesne publikacje z dydaktyki matematyki wskazują między innymi na aspekty teoretyczne i praktyczne kształcenia matematycznego uczniów i studentów, rolę i znaczenie kadry nauczycieli matematyki szkół i uczelni w realizacji i aktualizacji treści tego kształcenia, na innowacyjne i informacyjne technologie w nauczaniu matematyki. Poprawa wyników badań PISA polskich uczniów z matematyki wymaga zmiany jej nauczania, które dotychczas preferuje wykonywanie obliczeń przez uczniów, kosztem zaniedbywania rozwijania u nich aspektów myślenia problemowego. Jednocześnie wysiłek nauczycieli matematyki i uczniów powinien być skoncentrowany nie tylko na standardach i testach na egzaminach zewnętrznych z matematyki, ale także powinien mieć na uwadze standardy i styl myślenia organizatorów badania PISA z tego przedmiotu. Niezbędne są tu strategiczne działania, które będą wspomagać pracę szkół i uczniów oraz czynnych nauczycieli matematyki i ich system doskonalenia i dokształcania; promować organizację współpracy i wymianę doświadczeń z wyróżniającymi się nauczycielami, wdrażać do praktyki szkolnego nauczania indywidualne podejście dostosowane do każdego ucznia i jego rozwoju przedmiotowego, w szczególności ucznia uzdolnionego matematycznie.

W tym kontekście warto wspomnieć o międzynarodowych porównawczych badaniach kształcenia nauczycieli matematyki w różnych systemach edukacyjnych i wnioskach zeń płynących. W Polsce kierownikiem Badania Kształcenia i Doskonalenia Zawodowego Nauczycieli Matematyki (Teacher Education and Development Study in Mathematics, TEDS-M) był M. Sitek z Instytutu Badań Edukacyjnych. Stwierdza on między innymi, że *kształcimy bardzo dużo nauczycieli, a jednocześnie nie dbamy o jakość tego kształcenia.* I dodaje, że *nauczanie matematyki często jest przeteoretyzowane, istnieje ambicja, że absolwent studiów matematycznych przede wszystkim jest dobrym matematykiem. [...] To wyraźnie pojawiło się w wynikach naszych badań. Wiedza z zakresu dydaktyki matematyki nie tylko odstawała od wiedzy teoretycznej, ale też brakowało warsztatu nauczycielskiego w indywidualnym podejściu do ucznia, choćby umiejętności jak wytłumaczyć uczniowi na czym polega jego błąd, jakie są inne sposoby rozwiązania zadania.* I dalej M. Sitek twierdzi także, że *kluczową kwestią dla poprawy jakości pracy nauczycieli w Polsce jest doskonalenie nauczycieli, dokształcanie, poprawa ich kompetencji* (zob. Jastrzębska, 2010). Ale wymaga to stworzenia gęstej sieci ośrodków wspomagających szkoły oraz lepszego systemu dokształcania i doskonalenia nauczycieli.

Jakość kształcenia matematycznego uczniów jest przedmiotem kontroli nadzoru pedagogicznego, natomiast studentów Państwowej Komisji Akredytacyjnej (PKA) oraz zainteresowania odpowiednich ministerstw; środowisk szkolnych, akademickich i opiniotwórczych (zob. np. Wojciechowska, 2010). W szczególności, wyniki egzaminu gimnazjalnego i maturalnego z matematyki były i są przedmiotem wnikliwych badań i analiz między innymi zespołów badawczych z OKE (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna) i CKE (Centralna Komisja Egzaminacyjna). Zaniepokojenie muszą budzić pewne negatywne zjawiska, do których można zaliczyć: 1) spadek zainteresowania młodzieży kształceniem matematycznym, mierzony liczbą osób zdających egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym, a także słabe wyniki z tego egzaminu na poziomie podstawowym; 2) spadek zainteresowania absolwentów szkół ponadgimnazjalnych podejmowaniem studiów w zakresie nauk ścisłych i technicznych, 3) niezadowalający poziom szkolnej wiedzy matematycznej u kandydatów na studia, którzy zdawali egzamin maturalny z matematyki, co stwierdzają przedstawiciele środowisk matematycznych szkół wyższych; 4) przejawy dyskredytowania tradycyjnego nauczania matematyki i potrzeby ścisłych matematycznych dowodów na rzecz preferowania aplikacji i programów komputerowych, Internetu i TI oraz złudnego przekonania młodzieży do ich nieograniczonych możliwości.

W tym kontekście warto tu za I. F. Sharyginem (2000) przytoczyć słowa wybitnego matematyka rosyjskiego V. I. Arnolda z jego referatu pt.: *Antiscientific Revolution and Mathematics* at the International Congress of Papal Academy of Sciences in Vatican, October 26, 1998: *ci, którzy nie będą mistrzami sztuki rygorów matematycznych uzasadnień w szkole, nie zdołają odróżnić między prawdziwym i fałszywym uzasadnieniem. Nieodpowiedzialni politycy mogą łatwo manipulować takim człowiekiem.* Także godzi się tu odnotować, że na podobne zjawisko w amerykańskich szkołach zwrócił uwagę 7 III 2007 roku Bill Gates na forum Kongresu USA. Apelował mianowicie o zmianę programów nauczania matematyki, fizyki i innych przedmiotów, bo nauki ścisłe w USA stają się coraz mniej konkurencyjne na świecie. Na szczęście ten obniżający się poziom edukacji matematycznej w polskich szkołach ponadgimnazjalnych spowodował zawarcie i wdrożenie porozumienia ministra edukacji narodowej z rektorami szkół wyższych, które określane jest dziś jako **„nowa rewolucja maturalna”.** Oto najważniejsze jego ustalenia: 1) przyjęto kalendarz ewolucyjnych zmian w przeprowadzaniu egzaminu maturalnego i przeliczaniu jego wyników w latach 2008-2010 na punkty rekrutacyjne w szkołach wyższych, 2) określono próg zdawalności matury na poziomie 30% zarówno dla poziomu podstawowego, jak i rozszerzonego; ale rozszerzony będzie zawierał wiadomości potrzebne do rozwiązania zadań z podstawowego, co w przypadku niepowodzenia będzie dawać możliwość zaliczenia egzaminu na poziomie podstawowym; 3) ustalono, że na maturze w 2010 roku matematyka będzie przedmiotem obowiązkowym na poziomie podstawowym z jednolitym arkuszem egzaminacyjnym. Mimo tego, powyższe sygnały o rażącej niewiedzy z matematyki szkolnej tegorocznych studentów I roku oraz wyniki badań sondażowych wzbudzają niepokój i rzucają się cieniem na to wdrożenie. Trzeba mieć jednak nadzieję, że wprowadzenie obowiązkowej matury z matematyki powinno wymusić i wpłynąć na podniesienie jakości kształcenia matematycznego młodzieży. Oto co pisze na ten temat A. Gwozdowska (2009): *według najnowszego sondażu TNS OBOP, aż 44 proc. respondentów uważa, że nauki ścisłe są w Polsce mniej popularne niż kiedyś. I trudno się tym wynikom dziwić. Od lat tabuny artystów, polityków, a nawet naukowców zrażają Polaków do fizyki i matematyki. To już tradycja, że przy okazji matur słyszymy wspomnienia gwiazd o tym, jak ściągały na egzaminie z matematyki. Typowy humanista to osobnik, który chwali się tym, że nie ma pojęcia o obliczaniu procentów, nie wspominając o prostym dzieleniu czy podnoszeniu do potęgi. Matematyczna ignorancja jest po prostu modna. Jak to zmienić? Samo wprowadzenie obowiązkowej matury z matematyki nie wystarczy. Potrzebni są nauczyciele z charyzmą, ciekawe podręczniki i dobre uczelnie. Niestety wszystko to wymaga czasu i pieniędzy. Może warto więc podpatrzyć, jak tworzyły się zręby polskiej szkoły matematycznej z czasów międzywojennego dwudziestolecia. Profesorowie wykształceni na zachodnich uniwersytetach, bardzo często sławy w swoich dziedzinach, wracali do odrodzonej Polski nie tylko z patriotycznej potrzeby serca.*

*W kraju cieszyli się estymą, nieźle zarabiali [mogli za swoje wynagrodzenie kupić np. fiata], pracowali w systemie, w którym naukowe wynalazki miały szansę na zastosowanie w przemyśle. Dziś takiej atmosfery brakuje. Najzdolniejsi młodzi ludzie wyjeżdżają za granicę, a profesorowie chałturzą na kilku uczelniach, żeby żyć na godnym poziomie. Na tym cierpi z kolei poziom ich badań i wykładów. Dlatego specjalne stypendia, które obecna minister szkolnictwa wyższego oferuje studentom decydującym się na naukę na kierunkach ścisłych, nie wystarczą. Im szybciej zrozumieją to politycy, zazwyczaj rekrutujący się z opisanych wyżej tabunów humanistów, tym lepiej.*

Przywrócenie i wdrożenie obowiązkowego egzaminu maturalnego z matematyki w 2010 roku stało się obecnie „rewolucyjną" zmianą w Polsce dla przyszłości jakości matematycznego kształcenia na każdym etapie edukacji szkolnej i na poziomie akademickim. Ale trzeba równocześnie zauważyć, że wdrożona reforma systemu szkolnego w 1999 roku i modernizacja kształcenia matematycznego nie generuje jeszcze zadowalająco podniesienia poziomu jakości kształcenia. Na przykład, niektórzy absolwenci szkół ponadgimnazjalnych z 2010 roku, jako studenci I roku studiów, wykazywali rażącą niewiedzę matematyczną: nawet nie odróżniali iloczynu od ilorazu, nie znali terminologii i symboliki matematycznej, mieli braki w umiejętnościach rozwiązywania elementarnych równań i nierówności stopnia pierwszego bądź drugiego. Jakość kształcenia matematycznego uczniów i studentów oceniana jest i będzie w przyszłości przez pryzmat skuteczności pracy nauczycieli i ich efektów kształcenia matematycznego (zob. Leszczyńska, 2011). Zwróćmy obecnie uwagę na pewne doświadczenia i przykłady autora tej pracy z praktyki kształcenia matematycznego studentów matematyki i informatyki.

## 6. Kultura matematyczna studentów, w świetle praktyki ich kształcenia

P. J. Taylor (2003) twierdzi, że matematyka i nauczanie matematyki na wysokim poziomie są kluczami do rozwiązywania problemów światowej egzystencji i do planowania przyszłości. Również Micheal Porter, prof. Harvard Business School, zdecydowanie podkreśla, że zamożność narodów tworzy się, a nie dziedziczy. Nie wyrasta ona z naturalnych bogactw kraju, jego siły roboczej, jego stóp procentowych ani z wartości jego waluty. Konkurencyjność gospodarki zależy dzisiaj bowiem przede wszystkim od zdolności jej przemysłu do innowacji, do podnoszenia aktualnego poziomu technologicznego. Nauka i wiedza były i będą motorem postępu, rozwoju cywilizacyjnego i gospodarczego, a zaniedbywanie ich jest inwestowaniem w ignorancję. Można parafrazować i zaadoptować powyższe stwierdzenie do edukacji matematycznej. **Jakość kształcenia matematycznego tworzy się, a nie dziedziczy!** Ta jakość kształcenia matematycznego uczestników tego procesu (uczniów, studentów) zależna jest od wielu czynników, w szczególności od przygotowania i profesjonalizmu nauczycieli matematyki, którzy kreują jej poziom. Dlatego tak ważne jest dobre kształcenie, dokształcanie i doskonalenie kadry nauczycieli matematyki. Z. Moszner uwzględniając specyfikę ich studiów postuluje m. in., aby w procesie kształcenia nauczycieli matematyki: 1) „mniej, ale dokładniej" uczyć na studiach, 2) aktywizować do samodzielnego poznawania, równolegle ze zrozumieniem treści i metod matematycznych, nabywania kultury matematycznej, 3) być dla nich dobrym przykładem dydaktycznym (zob. Moszner, 2004). Aktualnie istnieje potrzeba promowania podejmowania studiów matematyczno-przyrodniczych i technicznych oraz podnoszenia jakości kształcenia matematycznego uczniów i studentów, w szczególności na studiach przygotowujących do zawodu przyszłych nauczycieli matematyki, informatyki i innych specjalistów w zakresie nauk ścisłych. Podejmują się tego różne uczelnie.

Na przykład, do zawodu nauczyciela matematyki i informatyki sposobią się studenci matematyki specjalności nauczycielskiej na Wydziale Matematyki i Fizyki Stosowanej Politechniki Rzeszowskiej im. Ignacego Łukasiewicza. Na II roku uzupełniających studiów magisterskich realizują program seminarium z rozwiązywania zadań matematycznych. W szczególności, weryfikują i doskonalą swoje kompetencje matematyczne i metodyczne oraz umiejętności w zakresie doboru zadań do celów i zadań lekcji, metody i sposoby ich rozwiązywania na danym poziomie edukacji matematycznej. Poniżej zwrócimy uwagę na zestaw zadań rozwiązywany przez tych studentów, które zapożyczono z różnych źródeł (zob. np. Ciesielska i współ., 1990; Иванов, 2009; Pardała, 2010). Syntetycznie omówimy ujawnione u nich pomysły i kompetencje matematyczne, różnorodne trudności i braki oraz problemy metodyczne dotyczące rozwiązywania wybranych zadań matematycznych.

Przykład 1.
Udowodnić, że: jeżeli pierwiastki równania $x^2 + px + q = 0$ są rzeczywiste, to pierwiastki równania $x^2 + px + q + (x + a)(2x + p) = 0$ będą również rzeczywiste dla dowolnego rzeczywistego $a$.

To zadanie z zakresu programu matematyki szkoły ponadgimnazjalnej i okazało się być zadaniem ciekawym dla niektórych studentów z tej grupy seminaryjnej. Jego trudność tkwiła w tym, że zarówno jedno, jak i drugie równanie zawiera parametry. Mimo że studenci znali warunek na istnienie pierwiastków rzeczywistych każdego z tych równań, to jednak (ku mojemu zdziwieniu) niektórzy z nich nie potrafili poprawnie rozwiązać tego zadania i przeprowadzić dowodu. A ich trudności i bezradność zaczynały się od momentu, gdy należało ustalić, kiedy równanie $x^2+px+q+(x+a)(2x+p) = 0$ będzie miało pierwiastki rzeczywiste dla dowolnego rzeczywistego a. Otóż po wspólnym rozstrzygnięciu tej kwestii i otrzymaniu niezbędnej nierówności: $a^2 - ap + p^2 - 3q \geqslant 0$ nadal niektórzy studenci byli bezradni. Ich błąd polegał na tym, że tę nierówność postrzegali wyłącznie jako nierówność stopnia drugiego zmiennej $p$ z parametrem $a$ (zamiast odwrotnie). Wówczas ta nierówność jest spełniona, gdy $a^2 - 4q \geqslant 0$. A ten warunek nie jest prawdziwy dla dowolnego rzeczywistego $a$ i $q$. Brak elastyczności myślenia u tych studentów ograniczał im dostrzeżenie drogi do poprawnego sfinalizowania rozwiązania tego zadania na dowodzenie, która wiodła tu poprzez zmianę interpretacji otrzymanej nierówności: $a^2 - ap + p^2 - 3q \geqslant 0$.

Przykład 2.
Porównać liczby $2^\pi$ i $\pi^2$.

To ćwiczenie wydawało się być dla studentów trywialne. Trafnie i kategorycznie stwierdzali: $2^\pi$ jest mniejsze od $\pi^2$, oczywiście po wykonaniu szacunkowych obliczeń bądź zastosowaniu kalkulatora. Ale ku mojemu zaskoczeniu okazali się być bezradni, gdy mieli samodzielnie i formalnie uzasadnić tę nierówność.

Przypuśćmy, że $2^\pi < \pi^2$.

Po wskazaniu im funkcji pomocniczej $f(x) = \frac{1}{x}\ln x$, dostrzegli drogę dowodu tego faktu. Ta funkcja na podstawie odpowiedniego twierdzenia jest malejąca dla $x > e$. Wówczas zauważyli, że zachodzi zależność: $\frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{4}\ln 4 < \frac{\ln\pi}{\pi}$. A stąd $\frac{\ln 2}{2} < \frac{\ln\pi}{\pi}$, czyli oczywista staje się prawdziwość nierówności $2^\pi < \pi^2$.

Przykład 3.
Rozwiązać równania:

1) $x^6 = 6^x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$;
2) $\sin x + \sin y = \sin(xy)$, gdzie $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Studenci łatwo dostrzegli, że jednym z pierwiastków równania $x^6 = 6^x$ jest $x = 6$. Istnienie innych pierwiastków tego równania próbowali potwierdzić graficznie, szukając odciętych punktów wspólnych wykresów funkcji $y = x^6$ i $y = 6^x$. Taka metodyka poszukiwania rozwiązania utwierdzała niektórych rozwiązujących w przekonaniu, że to równanie ma tylko 2 pierwiastki rzeczywiste, co było błędnym przekonaniem. Wówczas powstała naturalna potrzeba uwiarygodnienia niepoprawności tej tezy. Innym, skutecznym sposobem poszukiwania rozwiązania tego zadania było rozwiązanie zadania pomocniczego: *zbadać przebieg zmienności funkcji $y = x^6 6^{-x}$ i udowodnić, że równanie $x^6 = 6^x$ ma dokładnie trzy pierwiastki rzeczywiste.* Dopiero ta metoda rozwiązania utwierdziła studentów w przekonaniu, że istotnie dane równanie ma tylko trzy pierwiastki rzeczywiste. W toku refleksji nad jego rozwiązaniem powstał problem: *jak wyznaczyć efektywnie pierwiastki tego równania?* To pytanie stanowiło dopełnienie procesu rozwiązania równania $x^6 = 6^x$. Studenci, stosując odpowiednie aplikacje komputerowe, podawali przybliżone wartości niektórych pierwiastków tego równania, na przykład: $-0,7898$; $1,6242$; 6. Chodziło tu jednak, aby wskazać efektywnie pierwiastki tego równania. W tym celu wystarczyło rozważyć funkcję pomocniczą $f(x) = xe^x$ dla $x > -1$ i wykazać istnienie doń funkcji odwrotnej $g$. Wówczas można już udowodnić, że pierwiastkami równania $x^6 = 6^x$ są liczby: 6, $-\frac{6}{\ln 6}g(\frac{\ln 6}{6})$, $-\frac{6}{\ln 6}g(-\frac{\ln 6}{6})$.

Poszukiwanie rozwiązania równania $\sin x + \sin y = \sin(xy)$, gdzie $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$ okazało się być zadaniem nietypowym i trudnym dla studentów – przyszłych nauczycieli matematyki. Niektórym z nich udało się rozstrzygnąć, że to równanie nie ma rozwiązania w podanym zbiorze. *Oto ich dowód nie wprost tego faktu.* Przypuśćmy, że dane równanie ma rozwiązanie w podanym zbiorze. Wiadomo, że funkcja $f(x) = \sin x$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ jest rosnąca i przyjmuje wartości tylko z przedziału $(0, 1)$. Zauważmy, że: jeśli $x \in (0, 1)$ lub $y \in (0, 1)$, to $\sin(xy) < \sin y$ lub $\sin(xy) < \sin x$. Czyli $\sin x < 0$ lub $\sin y < 0$, a to jest sprzeczność, bo $\sin x \in (0, 1)$ i $\sin y \in (0, 1)$. Dla pełności tego dowodu należy rozważyć jeszcze przypadek $x \in [1, \frac{\pi}{2})$ i $y \in [1, \frac{\pi}{2})$. Stąd $\sin(xy) = \sin x + \sin y > 2\sin 1$, czyli $\sin(xy) > 2\sin 1 > 2\sin\frac{\pi}{6} = 1$, a to jest sprzeczność, bo $\sin(xy) \in (0, 1)$.

Przykład 4.
a) Dany jest trójkąt $ABC$. Niech punkty $K$, $L$, $M$ należą odpowiednio do kolejnych jego boków $AB$, $BC$, $AC$ oraz dzielą je na odcinki w ustalonym stosunku $m \in [0, 1]$.

Odcinki $AL$, $BM$ i $CK$ przecinają się parami, a ich punkty przecięcia $P$, $Q$, $R$ są wierzchołkami nowego trójkąta. Niech $f$ będzie funkcją $m$, opisującą stosunek pola otrzymanego trójkąta $PQR$ do pola trójkąta $ABC$. Znaleźć wzór opisujący funkcję $f$.
b) Naszkicować wykres funkcji $f$ oraz jej przedłużenia na zbiór $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie tego zadania wzbudziło zainteresowanie studentów – przyszłych nauczycieli matematyki. Jego poszukiwanie rozpoczęli od prób spontanicznej ilustracji graficznej do tematu zadania. Niektórzy z nich koncentrowali się tylko na tej ilustracji dla ustalonego trójkąta. To geometryczne podejście hamowało ich pomysłowość i nie otwierało im drogi do rozwiązania zadania. Dopiero kolejne ich próby ukierunkowane na wprowadzenie odpowiedniego prostokątnego układu odniesienia otworzyły drogę do pomyślnego rozwiązania tego zadania. Po zastosowaniu metody współrzędnych i wykonaniu stosownych przeliczeń niektórzy studenci otrzymali poprawny wzór szukanej funkcji: $f(m) = \frac{(1-m)^2}{m^2+m+1}$ dla $m \in [0, 1]$. Ta funkcja jest ciągła i opisuje przekształcenie geometryczne, które nie jest przekształceniem homograficznym. A zbadanie przebiegu jej zmienności oraz jej przedłużenia na zbiór $\mathbb{R}$ było już standardowym zadaniem dla studentów matematyki. Po rozwiązaniu tego zadania podjęto również próbę rozwiązania zadania ogólniejszego, adekwatnie formułując jego odpowiednik na płaszczyźnie i w przestrzeni, czyli dla czworokąta wypukłego oraz dla czworościanu. Ale już bez powodzenia i w naturalny sposób ujawnił się tu problem otwarty dla tej grupy studentów.

Przykład 5.
a) Na ile części może podzielić prostą danych $n$ jej punktów?
b) Na ile części podzieli płaszczyznę danych $n$ prostych, gdy żadne dwie z nich nie są równoległe i żadne trzy z nich nie przecinają się w jednym punkcie?
c) Na ile części podzielą przestrzeń $\mathbb{R}^3$ płaszczyzny zawarte we wszystkich ścianach sześcianu (czworościanu)?

To zadanie również wzbudziło zainteresowanie studentów. Po wykonaniu odpowiednich rysunków dostrzegali bez trudu poprawne jego rozwiązanie w każdym z podpunktów. Zadanie 5a) i jego rozwiązanie było wskazówką do rozwiązania zadania 5b). Niektórzy z nich dostrzegli poprawne jego rozwiązanie: dane $n$ prostych spełniających podane warunki podzielą płaszczyznę maksymalnie na $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ części. Mieli jednak trudności z poprawnym jego uzasadnieniem. Co więcej, nie widzieli potrzeby przeprowadzenia tu dowodu indukcyjnego, bądź zarysowania takiego dowodu. Niech $c_n$ oznacza liczbę części płaszczyzny, jakie powstaną z podziału jej przez dane $n$ prostych, czyli $c_1 = 2$. Rozważmy teraz jeszcze jedną prostą $l_{n+1}$, która będzie miała $n$ punktów przecięcia, po jednym z każdą z danych $n$ prostych. Oczywiście każdy z tych $n$ punktów podzieli prostą $l_{n+1}$ na $n+1$ odcinków, a każdy z tych odcinków podzieli jedną spośród $n+1$ części płaszczyzny, w których zawiera się, na dwie części. Czyli otrzymuje się zależność: $c_{n+1} = c_n + n + 1$ dla $n \in \mathbb{N}_0$ oraz $c_0 = 1$. A stąd ostatecznie: $c_n = c_{n-1} + n = 1 + (1 + 2 + 3 + ... + n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $c_0 = 1$.

Przykład 6.
a) Na ile części mogą podzielić przestrzeń $\mathbb{R}^3$ dane $n$ płaszczyzn, gdy żadne dwie

z nich nie są równoległe do siebie, żadne trzy z nich nie są równoległe do pewnej prostej i żadne cztery z nich nie mają punktu wspólnego?
b) Przy jakich warunkach dane $n$ prostych (płaszczyzn) podzieli płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ (przestrzeń $\mathbb{R}^3$) na maksymalną ilość części?
c) Udowodnić, że dane $n$ płaszczyzn może podzielić przestrzeń $\mathbb{R}^3$ maksymalnie na $v(n,3)$ obszarów, przy czym $v(n,3) = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3$ dla $n \in N$. d) Uogólnić wzór $v(n,3)$ i udowodnić go dla $n$ hiperpłaszczyzn przestrzeni $\mathbb{R}^k$dla $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ oraz przyjąć, że $C_n^k = 0$, gdy $k > n$.

Powyższe zadania 5a)-5c) i 6a)-6d) mają fabułę geometryczną, przy czym każde następne jest przedłużeniem bądź uogólnieniem poprzedniego. Wykorzystałem je do diagnozowania wiedzy matematycznej studentów z zakresu geometrii, kombinatoryki i algebry oraz poziomu rozwoju ich wyobraźni geometrycznej i przestrzennej. Studenci zauważyli, że rozwiązanie zadania 6 nie budzi trudności po ustaleniu początkowych wartości $n$. Ale rozwiązanie tego zadania dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ ujawniło ich trudności i braki w umiejętnościach rozwiązywania zadań. Jego rozwiązanie stało się dla nich trudne, gdy należało sformułować warunki ogólnego położenia danych $n$ płaszczyzn w przestrzeni $R^3$ (bądź $n$ hiperpłaszczyzn w przestrzeni $\mathbb{R}^k$ dla $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$) i podać dowód wzoru $v(n,3)$, a także jego uogólnionej wersji. Z poprawnym rozwiązaniem tych zadań studenci – przyszli nauczyciele matematyki i informatyki nie poradzili sobie bez mojej pomocy, a szczególnie ze sformułowaniem wzoru na $v(n,3)$ i jego dowodem.

Obecnie przejdę do omówienia dalszych własnych doświadczeń związanych tym razem z kształceniem matematycznym studentów I roku informatyki w Politechnice Rzeszowskiej. Dla przykładu syntetycznie omówię uwarunkowania tego kształcenia oraz wyniki studentów na egzaminie z przedmiotu matematycznego, którego program realizowano w I semestrze w bieżącym roku akademickim. Odniosę się także do ich pomysłów i kompetencji matematycznych, różnorodnych trudności i braków ujawnionych przy rozwiązywaniu zadań z tego egzaminu. Otóż po wprowadzeniu studiów dwustopniowych kształcenie matematyczne studentów informatyki w semestrze I w mojej uczelni realizuje się w ramach przedmiotu *Analiza matematyczna z algebrą liniową* w wymiarze 30 godzin wykładów i 45 godzin ćwiczeń. Nauczyciel odpowiedzialny za ten przedmiot opracowuje jego kartę zatwierdzaną przez kierownika katedry i dziekana wydziału. Karta tego „podwójnego" przedmiotu, który będę krótko nazywał dalej matematyką, zawiera treści kształcenia zgodne z minimalnymi wymaganiami określonymi w obowiązujących standardach kształcenia dla tego kierunku studiów. I określa także efekty kształcenia, formę i warunki zaliczenia tego przedmiotu oraz zalecany wykaz podstawowej i uzupełniającej literatury. Na rzetelną realizację tak obszernego programu tego przedmiotu 75 godzin zajęć dydaktycznych to za mało, dlatego studenci muszą w trybie indywidualnej pracy, na zajęciach wyrównawczych oraz na konsultacjach, przyswajać pewne treści z tego programu, które nie zdołali opanować na zajęciach dydaktycznych. Program tego przedmiotu realizowany był na zajęciach dydaktycznych (wykładach i ćwiczeniach) tradycyjnymi metodami, to znaczy bez wspomagania i wykorzystywania w jego realizacji programów komputerowych, TI i Internetu. Na I roku informatyki studia rozpoczęło 331 studentów w 13 grupach ćwiczeniowych, w tym 37 studentów powtarzało ten przedmiot. Ostateczna sprawność uzyskania zaliczenia tych ćwiczeń wyniosła 51,7%. Do egzaminu z przedmiotu *Analiza matematyczna z algebrą liniową* zostali dopuszczeni tylko ci studenci, którzy uzyskali zaliczenie ćwiczeń z tego przedmiotu. Na egzaminie studenci otrzymywali do rozwiązania w ciągu 90 minut zestaw 5 zadań, który miał wagę 21 punktów.

Przykład 7.
Tematy zadań jednego z zestawów egzaminacyjnych:

1. Uzupełnić poniższe zapisy:

    1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n = \ldots,\ \lambda \in \mathbb{R}$;
    2) $(f(x)g(x))' = \ldots$;
    3) $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \ldots$;
    4) $\int f(x)g'(x)dx = \ldots$;
    5) $z^n = \ldots,\ z \in \mathbb{C}$.

2. Obliczyć:

    a) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n})$;
    b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin 3x}$;
    c) $\det((AA)^T)$, gdy $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Obliczyć pole figury $D$ ograniczonej krzywymi $y = x^2$ i $x = y^2$.
4. Wyznaczyć obszar bezwzględnej zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{5^n\sqrt{n}}$.
5.

a) Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = e^x + e^{-x}$ dla $x \in \mathbb{R}$.
b) Rozwiązać równanie różniczkowe $y' + \frac{2y}{\sin 2x} = 0$ .

Punktacja zadań była następująca: zad. 1: $5 \times 1$p; zad. 2: $3 \times 2$p; zad. 3: 3p; zad. 4: 3p; zad. 5: $2 \times 2$p. W ocenie zespołu trzech nauczycieli prowadzących ćwiczenia tematy zadań egzaminacyjnych były zróżnicowane i analogiczne do rozwiązywanych na wykładzie bądź ćwiczeniach. Warunkiem zaliczenia egzaminu było uzyskanie co najmniej 9p. Ostateczna sprawność zaliczenia tego egzaminu przez studentów I roku informatyki po I semestrze w 2011 roku wyniosła 51%, a rezygnacje ze studiowania stanowiły 7% tej populacji studentów, pozostali studenci z tej populacji w ramach dopuszczalnego długu zostali skierowani na powtórzenie przedmiotu. Z rozmów ze studentami, którzy mieli trudności z przyswajaniem i zrozumieniem treści przewidzianych programem tego przedmiotu, można było dostrzec ich samokrytycyzm. Szczerze stwierdzali, że: 1) tempo realizacji programu z matematyki i narastanie materiału do opanowania jest o wiele szybsze niż w szkole ponadgimnazjalnej, 2) brak wiedzy i umiejętności z zakresu szkolnej matematyki i logicznego myślenia są istotnymi powodami ich opóźniania się w percepcji realizowanych treści wykładów i ćwiczeń, powstawania trudności i narastania braków ze zrealizowanego materiału programowego. To z kolei przekładało się na słaby wynik z kolokwiów i opóźnienie w uzyskaniu zaliczenia ćwiczeń i egzaminu.

Pierwsze zadanie z powyższego zestawu egzaminacyjnego miało charakter testowy i odtwórczy, badało znajomość istotnych treści. Zadanie drugie, choć było typu ćwiczeniowego, to jego rozwiązanie wymagało pewnego pomysłu i było podejmowane przez rozwiązujących. Dla wielu studentów trudne okazało się tu ćwiczenie 2c), co było powodowane słabym opanowaniem umiejętności mnożenia macierzy. Zadanie 3 można zaliczyć do zadań problemowych, badało pewne umiejętności z zakresu rachunku całkowego i jego zastosowań. Najczęstszą blokadą przy jego rozwiązaniu była nieumiejętność studentów sporządzenia poprawnej wizualizacji danej figury płaskiej $D$. Niektórzy studenci w rozwiązaniu zadania 4 poprawnie wyznaczali jedynie promień bezwzględnej zbieżności pomocniczego szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{5^n\sqrt{n}}$, gdzie $y = x^2$. Z błędem natomiast wyznaczali obszar bezwzględnej zbieżności danego szeregu potęgowego, bo zapominali rozwiązać nierówność $|x^2| < 5$ albo zbadać jego zbieżność bezwzględną na końcach wyznaczonego przedziału liczbowego. Zadanie 5a) było najłatwiejsze dla rozwiązujących. Musieli wykazać się tu znajomością pewnego algorytmu postępowania oraz umiejętnością zastosowania go przy rozwiązywaniu tego zadania. Natomiast zadanie 5b) było trudne dla niektórych studentów. Poprawne jego rozwiązanie wymagało m.in. policzenia całki $\int \frac{-1}{\sin 2x} dx$, co było dla nich trudnością, z którą nie umieli się uporać. Chociaż w grupie tegorocznych studentów I roku informatyki 37 osób, tj. 11,2% tej populacji, powtarzało ten przedmiot, a pozostali mieli za sobą egzamin maturalny z matematyki przynajmniej w zakresie podstawowym, to ich współczynnik sprawności zaliczenia matematyki za I semestr nie jest większy w stosunku do ubiegłych lat.

Obecnie zwróćmy uwagę na potrzebę poprawy jakości kształcenia matematycznego studentów i jej uwarunkowania.

## 7. Wyzwania dla nowych koncepcji kształcenia matematycznego studentów

Ocena 500 uniwersytetów w 2010 roku, czyli światowy ranking uniwersytetów z 2010 roku (*QS World University Rankings, 2010*, 2010), wg ustalonych 7 kryteriów wskazuje, że wśród 303 najlepszych uniwersytetów świata nie ma polskiego uniwersytetu. Dopiero na 304 miejscu występuje UJ i na 364 miejscu można znaleźć UW (zob. www.qs.com). Wyniki tego rankingu z perspektywy przyjętych kryteriów rzucają się cieniem m.in. na funkcjonowanie polskich uczelni i poziom kształcenia studentów, w szczególności także na jakość kształcenia matematycznego studentów. Stąd naturalna staje się ***potrzeba doskonalenia oceny jakości kształcenia matematycznego studentów*** przez odpowiednie Zespoły Kierunków Studiów Państwowej Komisji Akredytacyjnej (PKA). W tym kontekście warto odwołać się do pracy A. Krajewskiej, która analizując m.in. wyniki kształcenia studentów w praktyce uniwersytetów w świetle badań empirycznych zauważa, że do ich opisu stosuje się różnorodną terminologię (zob. Krajewska, 2004, s. 273-281). Nadto istnieje tu duże zróżnicowanie „w określaniu i strategiach realizacji oczekiwanych wyników kształcenia" oraz dążenie do takiego ich specyfikowania, aby kreować wizerunek absolwenta uniwersytetu o kompetencjach wykraczających poza dyscyplinę, którą studiował. Autorka zgadza się z K. Denkiem, podkreślając, że proces kontroli i oceny wyników kształcenia w szkołach wyższych to jest najsłabsze ogniwo, bo tu kumuluje się „szereg problemów, trudności i mankamentów: przypadkowość, powierzchowność, schematyzm, subiektywizm". Aktualnie ewaluację efektów kształcenia i akredytacji, czyli zapewniania jakości kształcenia w polskich szkołach wyższych realizuje PKA, która działa już trzecią kadencję, zgodnie ze swoją misją i regulaminem oraz udoskonalonymi procedurami i przepisami przewidzianymi prawem. Pewną syntetyczną samoocenę na ten temat można znaleźć w sprawozdaniach z działalności PKA (zob. np. Wojciechowska, 2008; 2010).

Drugim takim wyzwaniem jest ***nowoczesność kształcenia studentów***, która jest i powinna być stymulatorem ich aktywizacji i motywowania do osiągania lepszych efektów ich kształcenia. Istotnie, wyzwaniem nowoczesności kształcenia młodzieży, jako pokolenia Net Generation, jest wspomaganie ich procesu kształcenia przez szersze wykorzystywanie przez nauczycieli na zajęciach dydaktycznych komputerów, TI, Internetu i e-learningu. Z przeprowadzonych badań młodzieży Uniwersytetu Warszawskiego wynika, że tylko 19% uczniów uznaje nauczycieli za ważne źródło wiedzy, natomiast aż 77% uczniów twierdzi, że więcej dowiadują się od swoich kolegów i z Internetu (zob. Nowakowski, 2009). Znamienne jest to, że istotne dla funkcjonowania w erze cyfrowej umiejętności rozwijane są przez uczniów w sieci, poza szkołą. Uczniowie i studenci samodzielnie kształcą i doskonalą w ten sposób innowacyjność, współpracę i komunikację, aktywne eksperymentowanie i posługiwanie się najnowszą technologią informacyjno-komunikacyjną oraz metodykę rozwiązywania problemów. Tę grupę młodych ludzi, uczniów i studentów, nazywa się współcześnie *Net Generation, Internet Generation, iGeneration, pokoleniem Milenium, pokoleniem cyfrowym, pokoleniem sieci* (zob. Dylak, 2009). Są oni najczęściej całkowicie zafascynowani i zanurzeni w TI i jej możliwościach. Przyzwyczajeni są do korzystania z mediów, programów komputerowych i TI. Co więcej, obserwuje się u nich wyraźnie charakterystyczny styl uczenia się, myślenia i komunikacji. Na przykład, wielozadaniowość i szybkość jest integralną częścią życia pokolenia sieci. Jak twierdzi Don Tapscott (2008) to pokolenie nie tylko słucha innej muzyki i ogląda inne filmy niż ich nauczyciele, ale przede wszystkim korzysta z innych narzędzi do komunikacji, zarówno w sensie technicznym, jak i symbolicznym. W dużej mierze zerwaniu ulega przez to transmisja międzypokoleniowa – współczesna szkoła i uczelnia zamiast być narzędziem modernizacji, staje się niekiedy jej hamulcem. Stąd potrzeba i konieczność zmiany, unowocześnienia sposobu nauczania i uczenia się młodzieży zainicjowanego przez samych nauczycieli. O ile prawie wszyscy uczniowie i studenci świetnie sobie radzą z poruszaniem się po Internecie, o tyle trudniej jest im z informacji zdobytych w Internecie, bądź z pomocą programów komputerowych lub TI zgłębiać i systematyzować nabywaną wiedzę bądź tworzyć nową. Nauczyciele matematyki powinni być kompetentni i pomocni do organizowania przestrzeni edukacyjnej uczniów i studentów z wykorzystaniem TI, nowoczesnych metod i narzędzi pracy, w szczególności w procesie ich kształcenia matematycznego. Z drugiej strony, zarówno szkoły, uczelnie jak i nauczyciele matematyki powinni rozsądnie wykorzystywać potencjał tej nowej technologii i nauczyć tego samego swoich uczniów i studentów. I jednocześnie muszą mieć świadomość, że „nasycanie" kształcenia matematycznego TI, Internetem, e-learningiem może generować typ osobowy „homo computericus". W ślad za tym TI mogą również negatywnie wpływać na środowisko ucznia, studenta i dyskredytować w tym kształceniu potrzebę matematycznych uzasadnień (zob. Sharygin, 2000). Chodzi tu jednak o to, by nie porzucać tej technologii i nie rezygnować z niej, a skoncentrować się na skuteczniejszym jej stosowaniu w praktyce kształcenia matematycznego.

W związku z powyższym zarówno dla dydaktyki matematyki, jak i praktyki kształcenia matematycznego na odpowiednim poziomie istotne jest pytanie: czy należy projektować i polecać ***kursy on line w kształceniu matematycznym uczniów i studentów?*** G. Siemens (2010), światowy autorytet w zakresie wykorzystywania TI w nauczaniu i uczeniu się, w wywiadzie nt. *wyzwania nowoczesnego nauczania* jednoznacznie stwierdza, że Internet nie jest obecnie przyczyną zjawiska „załamania się" systemu edukacji, lecz odwrotnie, to właśnie współczesne systemy edukacyjne nie dostosowały się i nie zaspokajają należycie potrzeb edukacyjnych i oczekiwań młodzieży oraz współczesnego społeczeństwa. W związku z tym trzeba te systemy odpowiednio przekonfigurować, by móc sensownie zagospodarować narastanie olbrzymiej ilości informacji i możliwości nowych technologii. G. Siemens zauważa z perspektywy historycznej, że ten problem nie dotyczy uczelni. I proponuje, by na poziomie szkół wyższych rozwijać u studentów nabyte umiejętności podstawowe w toku edukacji zakończonej maturą, a szczególnie skoncentrować się na ich zaktywizowaniu do twórczego poszerzania wiedzy oraz nauczeniu ich nowych umiejętności niezbędnych w życiu zawodowym i społecznym. Trafne są jego komentarze i sugestie metodyczne dotyczące kursów przedmiotowych on line w systemach edukacyjnych na każdym poziomie nauczania i dla uczących się w miejscach pracy. Z przekonaniem stwierdza, że „takie kursy są najlepsze, gdy służą pogłębianiu podstawowej wiedzy i umiejętności". A skuteczność takiego kursu wiedzy tym bardziej maleje, im bardziej dziedzina tej wiedzy jest skomplikowana. **Przy konstruowaniu kursu e-learning z matematyki trzeba mieć na uwadze następujące kwestie:** 1) kontekst, czyli uwarunkowania jego skuteczności i osiągnięcia powodzenia przez uczących się; 2) związki i połączenia prowadzącego ten kurs z uczącymi się, dotyczące upowszechniania poznawanej wiedzy poprzez sieć i technologię, wspierania uczących się i ich rozwoju, bądź bycia dostępnym dla uczących się; 3) potrzeby uczących się i konieczność stworzenia dla nich możliwości wyboru i różnorodności: tematów poznawanych treści, tempa uczenia się, metod nauki (on line lub mobilnej), formy aktywizowania (mentoring czy samokształcenie), itp. Taki kurs on line może z powodzeniem wspomagać tradycyjne kształcenie matematyczne studentów, a nauczyciel akademicki matematyki nadal będzie odgrywać istotną rolę w tym modelu kształcenia.

Kolejne wyzwanie poprawy jakości kształcenia matematycznego studentów będzie determinowane znowelizowaną ustawą o szkolnictwie wyższym i propozycją MNiSzW **wdrożenia dla szkolnictwa wyższego Krajowych Ram Kwalifikacji (KRK)**. Po przyjęciu przez MNiSzW odpowiednich aktów wykonawczych rozszerzą one autonomię programową uczelni oraz otworzą się dla nich nowe możliwości i zadania w tym zakresie (zob. Chmielecka, 2010). Zgodnie z dokumentem opisującym KRK zakłada się na przykład, że matematyczna kwalifikacja formalna studenta po zakończeniu pewnego etapu kształcenia w uczelni charakteryzowana jest przez *efekty kształcenia, poziom kształcenia i odpowiadający mu nakład pracy studenta.* Tę kwalifikację studenta mierzy się w punktach ECTS, by móc ją zweryfikować przez instytucję prowadzącą jego kształcenie matematyczne i przez kontrolującą przebieg tego kształcenia. Wyróżnia się tu trzy poziomy i nazwy kwalifikacji adekwatnie do poziomu ukończonych studiów z danego obszaru kształcenia, np. studiów w zakresie nauk ścisłych, w szczególności w zakresie matematyki. W dokumencie opisującym KRK wyróżnia się jeszcze kategorię *profil kształcenia.* Można ją rozumieć tradycyjnie jako całe spektrum zróżnicowanych kompetencji studenta niezbędnych mu do uzyskania określonych kwalifikacji, bądź jako specjalność kształcenia w ramach jego studiów. Współautorzy KRK, w szczególności kompetentny zespół autorów dla obszaru nauk ścisłych, szczegółowo opisuje oczekiwane efekty kształcenia w tym obszarze różnicując je odpowiednio dla studiów I, II i III stopnia (zob. Chmielecka, 2010, s. 41-44). Nie ma wątpliwości, że wdrożenie tej koncepcji do praktyki nauczania matematyki przez nauczycieli akademickich powinno wpłynąć na poprawę jakości kształcenia matematycznego studentów i wymusić osiąganie oczekiwanych efektów tego kształcenia na danym etapie studiów. Aby to osiągnąć, MNiSzW powinno uruchomić stosowny mechanizm – stałą grupę ekspertów – monitorowania, diagnozowania i korygowania wdrażania KRK w wyróżnionych obszarach kształcenia, w szczególności w obszarze nauk ścisłych. Tym bardziej, że „matematyka jest bogatsza niż inne nauki", jak twierdzi Shing-Tung Yau (2009), zdobywca matematycznego Nobla. Poprawa jakości kształcenia matematycznego studentów jest *na topie*, bo we współczesnym świecie wzrasta także prestiż zawodu matematyka (zob. CareerCast.com).

## 8. Podsumowanie

Problematyka tej pracy dotyczy jednego z aktualnych nurtów badawczych dydaktyki matematyki: ***jakości kształcenia matematycznego uczniów i studentów w XXI wieku w różnych krajach i tradycjach kulturowych.*** Opracowanie tematu rzuciło pewne światło na skatalogowanie analizowanej literatury i stan podejmowanych badań z tego zakresu oraz na współczesne wyzwania, innowacje i niektóre problemy jakości tego kształcenia, a także na istotność i wpływ wdrażania Procesu Bolońskiego na modernizację funkcjonowania szkolnictwa wyższego w Polsce. Odsłoniło również pewne podstawy teoretyczne dotyczące koncepcji doskonalenia jakości kształcenia matematycznego oraz jego uwarunkowania, a także nowe idee i tendencje, doświadczenia i trudności w realizacji podjętych w tym zakresie u nas zadań. Jednocześnie autor opracowania nawiązał do **potrzeby pielęgnowania i odwoływania się do tradycji, doświadczeń i zgromadzonej wiedzy metodycznej w rozwiązywaniu problemów kształcenia matematycznego uczniów i studentów, w szczególności nauczycieli matematyki** (zob. Polya, 1964, 1975; Krygowska, 1984, 1989; Moszner, 2004; Антонов, 2010 i in.). **Do kluczowych i aktualnych obszarów badawczych**

**autor pracy zalicza: 1)** problemy i metodologię monitorowania i diagnozowania jakości kształcenia matematycznego uczniów i studentów w związku z wdrażaniem nowych koncepcji kształcenia matematycznego na każdym poziomie edukacji, w szczególności zapowiadanego wdrożenia krajowych ram kwalifikacji dla szkolnictwa wyższego; **2)** problemy i metodologię opracowania planów studiów dla kierunków i specjalności, ich standardów kształcenia i programów przedmiotów matematycznych oraz zajęć dydaktycznych gwarantujących spełnienie wymagań i osiągnięcie oczekiwanych efektów kształcenia matematycznego studentów na studiach matematycznych oraz na innych kierunkach i specjalnościach studiów związanych z obszarem nauk ścisłych, które realizowane są w danej uczelni; **3)** problemy i metodologię projektowania i wdrażania do praktyki nauczania kursów on line z matematyki i przedmiotów matematycznych, innowacji w stosowaniu programów komputerowych i TI wspomagających podnoszenie jakości kształcenia matematycznego uczniów, studentów oraz dokształcanie i doskonalenie się nauczycieli matematyki.

Równolegle do kształcenia matematycznego (przedmiotowego) bardzo ważne jest – z perspektywy potrzeb przyszłych nauczycieli matematyki – kształcenie w zakresie dydaktyki matematyki studentów matematyki przygotowujących się do zawodu nauczycielskiego. Jest to oddzielny problem, nieporuszany w tej pracy, natomiast znajdujący odzwierciedlenie w niezliczonych publikacjach ogłoszonych w XX i w pierwszej dekadzie XXI wieku na świecie. Wystarczy zauważyć, że tylko grupa skupiona wokół krakowskich dydaktyków matematyki wykazuje łączną liczbę około 2200 publikacji: książek, artykułów naukowych i metodycznych; programów nauczania, podręczników szkolnych do matematyki i przewodników dla nauczycieli. Te szczegółowe informacje można znaleźć na stronie internetowej poświęconej Jubileuszowi 50-lecia Katedry Dydaktyki Matematyki Wyższej Szkoły Pedagogicznej (obecnie Uniwersytetu Pedagogicznego) im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie (zob. www.up.krakow.pl/mat/50ZDM/index.htm).

## Literatura

50 lat CIEAEM: Gdzie jesteśmy i dokąd zdążamy – Manifest 2000 na Rok Matematyki: 2000, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **22**, 208-223. Tł. z ang. S. Turnau.

Антонов, В. И.: 2010, Математическое образование в СПбГПУ, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **III**, 5-19.

Arzarello, F.: 2005, Technology and mathematics in the classroom: lights & shadows, *Proc. CIEAEM 57 Piazza Armerina*, 23-27.

Chmielecka, E. (red.): 2010, *Autonomia programowa uczelni. Ramy kwalifikacyjne dla szkolnictwa wyższego*, Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego, Warszawa.

Ciesielska, D., Ciesielski, K., Ombach, J.: 1990, Jak kandydat na nauczyciela matematyki rozumie matematykę – próba testu, *Matematyka Społeczeństwo Nauczanie* **I**(4), 6-11.

Ciosek, M.: 2005, *Proces rozwiązywania zadania na różnych poziomach wiedzy i doświadczenia matematycznego*, Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, Kraków.

Czajkowska, M., Treliński, G. (red.): 2006, *Kształcenie matematyczne – tendencje, badania, propozycje dydaktyczne*, Wydawnictwo Akademii Świętokrzyskiej im. J. Kochanowskiego, Kielce.

Dąbrowicz-Tlałka, A.: 2004, Działania szkół wyższych dla podwyższenia standardów kształcenia w aspekcie poziomu programowego nowej matury i matury międzynarodowej. Referat wygłoszony na XI Ogólnopolskiej Konferencji Nauczania Matematyki w Uczelniach Technicznych, Brenna'2004.

Denek, K.: 1983, Efektywność kształcenia w szkole wyższej i jej określanie, *Życie Szkoły Wyższej* **11**, 16-23.

Dwunaste Studium ICMI: Perspektywy nauczania i uczenia się algebry. Wprowadzenie do dyskusji: 2000, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **22**, 199-207. Tł. z ang. S. Turnau.

Dylak, S.: 2009, *Nauczyciel wobec uczniowskiego uwikłania w sieci,* Pozyskano z: http://www.ckp.edu.pl/konferencja/wyklady.html. Data dostępu: 15 IX 2011 r.

Гнеденко, Б. В.: 2004, О месте лекции в математическом образовании, *Математика в образовании* **2**, 107-120.

Gwozdowska, A.: 2009, Matematyka ma być trendy. *Polska* – Internetowe wydanie dziennika ogólnopolskiego z 6 VIII 2009 r.

Halmos, P. R.: 1976, Jak mówić o matematyce, *Wiadomości Matematyczne* **XIX**, 185-193. Tłumaczenie H. Zaporowicza artykułu opublikowanego w *Notices of the American Mathematical Sociaty*, w numerze z kwietnia 1974 roku.

Иванов, О. А.: 2009, *Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей*, Изд. МЦИМО, Москва.

Jastrzębska, L.: 2010, *Kształcimy wielu, nie patrzymy na jakość,* Pozyskano z: http://www.edufakty.pl/index.php/wywiady/item/168-kształcimy-wielu-nie-patrzymy-na-jakość.html. Wywiad z M. Sitkiem, EduFakty z 24 X 2010 roku. Data dostępu 15 XI 2011 r.

Karp, A., Vogeli, B. R.: 2010, *Russian Mathematics Education. History and World Significance,* Series on Mathematics Education, Vol. 4, Stallion Press, Singapore.

Krajewska, A.: 2004, *Jakość kształcenia uniwersyteckiego – ujęcie pedagogiczne*, Wydawnictwo Uniwersyteckie, Trans Humana, Białystok.

Krygowska, Z.: 1984, *Koncepcje powszechnego matematycznego kształcenia w reformach programów szkolnych*, WN WSP, Kraków.

Krygowska, Z.: 1989, Problemy kształcenia nauczycieli (próba podsumowania), *Nowa Szkoła* **1**, 20-30.

Krysiński, J.: 2007, Inwestor u rektora, *Forum Akademickie* **4**, 19-21. Rozmowa z A. Świeciem.

Кудрявцев, Л. Д.: 1985, *Современная математика и её преподавание*, Наука, Москва.

Legutko, M.: 2006, Analiza porównawcza wyników badania matematycznych umiejętności 16-latków w programie PISA i w egzaminie gimnazjalnym z roku 2003, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **29**, 63-113.

Leszczyńska, Z.: 2011, O próbnej maturze 2010, *Matematyka* **2**, 55.

Marciniak, Z.: 2008, Jak dbać o jakość kształcenia, *Dyrektor Szkoły* **2**, 9–11. Rozmowa z A. Rękawek.

Marciniak, Z.: 2009, Interesują nas efekty kształcenia, *Forum Akademickie* **6**, 18–20.

Moszner, Z.: 2004, Refleksje na temat kształcenia nauczycieli matematyki, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **26**, 255-264.

Nowakowski, Z.: 2009, *Nowa edukacja dla pokolenia sieci, czyli e-podręczniki na platformie edukacyjnej,* Pozyskano z: http://www.ap.krakow.pl/ktime/ref2009/nowakows.pdf. Data dostępu: 15 IX 2011 r.

Pacewicz, P.: 2011, Równe jest lepsze, *Gazeta Wyborcza* **2-3 IV**.

Pardała, A.: 2004, Kształtowanie twórczości w nauczaniu matematyki a praktyka szkolna i nauczycielska, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **26**, 265-287.

Pardała, A.: 2006, Nowe tendencje w kształceniu matematycznym szansą podniesienia jego poziomu, w: M. Czajkowska, G. Treliński (red.), *Kształcenie matematyczne – tendencje, badania, propozycje dydaktyczne*, Wydawnictwo Akademii Świętokrzyskiej im. J. Kochanowskiego, Kielce, 13-28.

Pardała, A.: 2010, O niektórych problemach nauczania matematyki, *Współczesne Problemy Nauczania Matematyki* **III**, 5-20.

Polya, G.: 1964, *Jak to rozwiązać?*, PWN, Warszawa.

Polya, G.: 1975, *Odkrycie matematyczne*, Wydaw. Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Pregiela, R. (red.): 2010, *Przedsiębiorczość akademicka – dylematy rozwoju. Raport z badań*, IZTECH, Polska Izba Gospodarcza Zaawansowanych Technologii, Warszawa.

*QS World University Rankings, 2010*: 2010, www.qs.com.

Rachoń, J.: 2009, *Bez matematyki kariery nie zrobisz,* Pozyskano z: www.rachon.senat.pl. Przemówienie na otwarcie II seminarium *Bez matematyki kariery nie zrobisz* zorganizowane 17 III 2009 roku w Politechnice Gdańskiej; Data dostępu: 15 IX 2011 r.

Sharygin, I. F.: 2000, Two articles and two hundred problems. Maszynopis udostępniony przez autora.

Shing-Tung, Y.: 2009, Szkoła jest lepsza, *Gazeta Wyborcza* 21 IV.

Siemens, G.: 2010, *Wyzwania nowoczesnego nauczania,* pozyskano z: Edukurier-edudom.pl . Wywiad przeprowadzony przez L. N. Gualtieri; Data dostępu: 15 IX 2011 r.

Tapscott, D.: 2008, *Grow up digital: how the net generation is changing your world?,* Pozyskano z: http://dontapscott.com/books/grown-up-digital. Data dostępu: 15 IX 2011 r.

Taylor, P. J.: 2003, Occasional Address of Doctor Honoris Causa Prof. Peter James Taylor., *Proceedings of the Third International Conference: Creativity in mathematics education and the education of gifted students, ICCME&EGS'2003*, Rousse, Bulgaria, 19-22.

Тихомиров, В. М.: 2000, О некоторых проблемах математического образования, *Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков.*, Изд. МЦИМО, 3-14.

Wielgus, S.: 2011, *Historyczne koncepcje i paradygmaty uniwersytetu oraz jego model na dziś i jutro*, Pozyskano z: www.kul.pl/141/Uniwersytet.doc. Data dostępu: 15 IX 2011 r.

Wojciechowska, B. (red.): 2008, *Działalność Państwowej Komisji Akredytacyjnej w latach 2005-2007 II kadencja*, Wydawnictwo OW ASPRA-JR, Warszawa.

Wojciechowska, B. (red.): 2010, *Działalność Państwowej Komisji Akredytacyjnej w 2009 roku*, Wydawnictwo OW ASPRA-JR, Warszawa.

Woolcock, N.: 2008, *Matematyczne nieuctwo się mści,* Pozyskano z: http://wiadomości.onet.pl. Za The Times, 6 VI 2008; Data dostępu: 15 IX 2011 r.

*Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza*
*ul. W. Pola 2*
*PL-35-959 Rzeszów*
*e-mail:* pardala@prz.edu.pl