Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis
Folia 36 Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia I (2006)

Joanna Major, Zbigniew Powązka

Uwagi dotyczące pojęcia wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej

Abstract. This paper deals with some studies of understanding the absolute value of real numbers. This article is divided into two parts. The first one contains the conclusions drawn from the analysis of the solutions of the mathematical problems with the absolute value which were solved by the secondary school pupils. The second part of the article contains the didactic proposition of teaching the concept of absolute value at various levels of mathematical education.

1. Wstęp

Dydaktycy matematyki w różny sposób formułują cele nauczania przedmiotu, niektórzy podają je bardzo szczegółowo, inni zaś poprzestają na ogólnym sformułowaniu, np. J. Dormolen, Z. Krygowska, S. Turnau, T. Varga, E. Wittman (por. Krygowska, 1981; Nowak, 1989; Turnau, 1990). Cele nauczania wskazują szczegółowe treści, metody oraz środki właściwe dla ich realizacji.

W opinii S. Kucharczyka (1998)

> Ucząc matematyki (niezależnie od poziomu edukacji), trzeba dostrzegać co najmniej 3 jej wartości:
> 1. wyrabianie umiejętności poprawnych wnioskowań, ścisłego opisywania faktów i ich rozumienia;
> 2. rozwijanie twórczej wyobraźni (geometrycznej, arytmetycznej, algebraicznej, kombinatorycznej itd.);
> 3. kształtowanie samodzielnych postaw w rozwiązywaniu zadań.

Zarówno matematycy jak i dydaktycy matematyki szczególną rolę w procesie edukacji przypisują rozwiązywaniu zadań. Zdaniem Z. Krygowskiej (1977b):

> Uczeń tworzy sobie taką koncepcję matematyki, jaka mu się ukazuje przez pryzmat rozwiązywanych przez niego zadań. Stosunek ucznia do matematyki i motywacje uczenia się tego przedmiotu w dużej mierze od tego zależą. Czym jest matematyka i czym może być ona dla niego, uczeń poznaje aktywnie właśnie rozwiązując odpowiednio dobrane matematyczne zadania.

Ważnym pojęciem matematycznym, poznawanym już przez uczniów szkoły podstawowej, jest wartość bezwzględna liczby rzeczywistej[1]. Na tym etapie kształcenia jest ona interpretowana jako odległość punktu osi liczbowej od punktu 0 tej osi. Zgodnie z koncepcją spiralnego nauczania, gdzie poszczególne treści opracowywane są na różnych poziomach abstrakcji, pojęcie wartości bezwzględnej przypomina się i stopniowo pogłębia na tle wcześniejszych doświadczeń na kolejnych etapach kształcenia matematycznego. W obowiązujących obecnie programach nauczania matematyki w pierwszej klasie szkoły ponadgimnazjalnej wśród treści nauczania można odnaleźć to pojęcie, a w tym: jego własności, interpretację geometryczną na osi liczbowej i układzie współrzędnych jako wykres funkcji oraz rozwiązywanie równań i nierówności, w których to pojęcie występuje (por. np.: Kłaczkow, Kurczab, Świda, 2000a; Kłaczkow, Kurczab, Świda, 2000b; Kłaczkow, Kurczab, Świda, 2000c; Szuty, Jakubas, Nodziński, 2002; Trzeciak, 2002; Bryński, Dróbka, Szymański, 2002; Treliński, 2002a; Treliński, 2002b; Treliński, 2002c).

Ponieważ wartość bezwzględna znajduje zastosowania i uogólnienia niemal w każdym dziale matematyki, należy właściwie kształtować to pojęcie na każdym poziomie edukacji matematycznej. Ważne jest także, aby uczeń dostrzegał możliwie różnorodne jego zastosowania i co najważniejsze potrafił posługiwać się nim w sposób operatywny.

Niniejszy artykuł składa się z dwóch części. Pierwsza z nich stanowi refleksje nad wynikami badań wstępnych, w czasie których grupa uczniów rozwiązywała zadania matematyczne dotyczące pojęcia wartości bezwzględnej. Druga część artykułu stanowi propozycję dydaktyczną ukazującą możliwość pogłębiania rozumienia przez uczniów pojęcia wartości bezwzględnej na różnych poziomach kształcenia matematycznego. Przedstawiono tu problemy dotyczące istnienia rozwiązań równań z wartością bezwzględną oraz zagadnienia poszukiwania warunków koniecznych i wystarczających istnienia tych rozwiązań.

2. Opis i wyniki badań dotyczących rozumienia pojęcia wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej

W niniejszym paragrafie przedstawiono fragment wyników badań wstępnych dotyczących posługiwania się i rozumienia przez uczniów liceum pojęcia wartości bezwzględnej. W pierwszej części opisano metodologię badań, użyte narzędzia, a także podano szczegółowe cele badań. W dalszej części (w paragrafie 2.2) podjęto próbę opisania wyników badań.

[1] Pisząc dalej o wartości bezwzględnej, będziemy mieć na myśli wartość bezwzględną liczby rzeczywistej.

2.1. Opis badań

W badaniach brało udział 29 uczniów kończących pierwszą klasę liceum ogólnokształcącego o profilu matematyczno-informatycznym z Krakowa.

Narzędzie badawcze stanowił zestaw 3 zaprezentowanych dalej zadań, nad którym każdy z uczniów pracował samodzielnie przez 45 minut. Rozwiązania zadań były zapisywane przez badanych na danym im arkuszu papieru.

Metodę badawczą stanowiła analiza wytworów działania uczniów rozwiązujących trzy podane zadania matematyczne (zob. Łobocki, 1984).

Celem badań była próba odpowiedzi na następujące pytania:

— Jakie sposoby rozwiązywania równań z wartością bezwzględną znają uczniowie pierwszej klasy liceum ogólnokształcącego?
— W jaki sposób uczniowie rozwiązują równania z wartością bezwzględną?
— Czy uczniowie potrafią wykorzystać informacje zawarte w tekście matematycznym do rozwiązania zadań nową, nieznaną im wcześniej metodą?

Chcąc uzyskać choćby częściowe odpowiedzi na sformułowane wyżej pytania badawcze, zaproponowano uczniom rozwiązanie następujących zadań.

Zadanie 1
Oto trzy sposoby rozwiązania równania

$$|x| = 2x - 1.$$

Zapoznaj się z nimi uważnie. Oceń ich poprawność. Który z nich podoba ci się najbardziej, dlaczego?

Sposób 1

Równanie $|x| = 2x - 1$ zastępujemy alternatywą dwóch warunków:

$$\begin{array}{ll} & 1^\circ\ x = 2x - 1, \qquad \text{przy założeniu, że } x \geqslant 0 \\ \text{lub} & \\ & 2^\circ\ x = -(2x - 1), \ \text{przy założeniu, że } x < 0. \end{array}$$

Ad. 1°. $x = 2x-1$ dla $x \geqslant 0$. Stąd $x-2x = -1$, zatem $-x = -1$. Ostatecznie $x = 1$.

Wartość $x = 1$ spełnia warunek $x \geqslant 0$, wobec tego jest ona rozwiązaniem równania $|x| = 2x - 1$.

Ad. 2°. $x = -(2x-1)$ dla $x < 0$. Stąd $x+2x = 1$, zatem $3x = 1$. Ostatecznie $x = \frac{1}{3}$.

Wartość ta nie spełnia warunku $x < 0$, więc nie jest ona rozwiązaniem równania $|x| = 2x - 1$.

Ostatecznie równanie $|x| = 2x - 1$ ma jedno rozwiązanie $x = 1$.

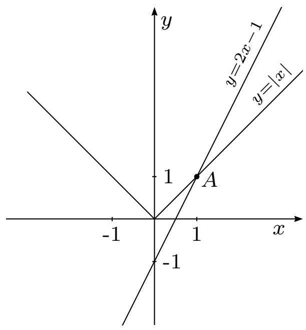
Sposób 2

Naszkicujmy wykresy funkcji: $y = |x|$ oraz $y = 2x - 1$ w jednym prostokątnym układzie współrzędnych.

Z rysunku 1 możemy odczytać, że wykresy funkcji $y = |x|$ oraz $y = 2x - 1$ przecinają się w jednym punkcie. Współrzędne tego punktu odczytujemy z wykresu: $A = (1, 1)$.

Na podstawie powyższego możemy sformułować i sprawdzić hipotezę, że równanie $|x| = 2x - 1$ ma jedno rozwiązanie: $x = 1$ (dla $x = 1$ prawa i lewa strona równania przyjmuje wartość 1).

Ostatecznie rozwiązaniem równania $|x| = 2x - 1$ jest $x = 1$.



Rysunek 1

Sposób 3

Zauważmy, że $|x| \geqslant 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Ponieważ lewa strona równania $|x| = 2x - 1$ jest nieujemna dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, zatem możemy wnioskować, że wyjściowe równanie ma rozwiązanie tylko dla $2x - 1 \geqslant 0$. Stąd $2x \geqslant 1$, czyli $x > 0$. Skoro $x > 0$, to $|x| = x$. Wobec powyższych uwag równanie $|x| = 2x - 1$ jest równoważne równaniu $x = 2x - 1$, czyli równaniu $-x = -1$. Ostatecznie $x = 1$.

Równanie $|x| = 2x - 1$ ma jedno rozwiązanie $x = 1$.

Zadanie 2

Sformułuj i rozwiąż (różnymi sposobami) zadanie podobne do zadania 1.

Zadanie 3

Rozwiąż równania:

a) $|x| = 2x$;

b) $|2x + 4| + |3x - 6| = 0$;

c) $|x + 3| = -2$.

Zauważmy, że analiza rozwiązań zadania 1 umożliwia pozyskanie informacji o ocenie poprawności rozwiązań przez poszczególnych badanych, pozwala ponadto w pewnym zakresie zbadać preferencje uczniów co do różnych zaprezentowanych sposobów rozwiązywania równania z wartością bezwzględną. Pozwala także zwrócić uwagę na te elementy rozwiązań zadania, w których w opinii badanych popełniono błędy. Może przyczynić się to do zwrócenia uwagi na części rozwiązania, z którymi badane osoby mogą mieć trudności, co może pomóc w konstrukcji zadań i problemów, mających na celu odpowiednie kształtowanie i ewentualną zmianę błędnych przekonań o pojęciu wartości bezwzględnej. Analiza sposobów rozwiązań zadania drugiego i trzeciego pozwala poznać sposoby pracy uczniów nad równaniami z wartością bezwzględną. Analiza rozwiązań zadania drugiego pozwala ponadto sprawdzić zrozumienie zaprezentowanych w zadaniu 1 sposobów rozwiązywania równań, a także umożliwia zaobserwowanie, w jaki sposób uczniowie wykorzystują w procesie rozwiązywania zadania informacje zawarte w tekście matematycznym.

2.2. Wyniki badań

Sformułowane w tej części artykułu wnioski, ze względu na niewielką liczbę osób biorących udział w badaniu, a także na formę przeprowadzenia badań (analiza wytworów działania uczniów), należy traktować wyłącznie jako hipotezy badawcze wymagające dalszej weryfikacji.

Próbę rozwiązania zadania 1 podjęli wszyscy uczniowie. Analizując rozwiązania zadania 1 stwierdzono, że praktycznie wszyscy badani (25 osób na 29 badanych) uznali, iż pierwszy z zaprezentowanych sposobów rozwiązania zadania jest poprawny (por. tabela 1). Mniej, bo tylko 16 badanych uznało za poprawny drugi ze sposobów rozwiązania zadania. Ponadto tylko 5 badanych stwierdziło, że trzeci sposób rozwiązania nie zawiera błędów. Na ten fakt niebagatelny wpływ mógł mieć sposób sformułowania rozwiązania, w którym brak jest „pośredniego kroku” rozumowania (z faktu, iż $2x \geqslant 1$ wyciąga się od razu wniosek, że $x > 0$). Brak tego pośredniego etapu mógł stanowić przeszkodę w zrozumieniu i właściwej ocenie przez uczniów poprawności rozwiązania.

Jak wynika z danych zawartych w tabeli 1, najwięcej osób (10 badanych) uznało za poprawny tylko pierwszy sposób rozwiązania bądź pierwszy i drugi sposób rozwiązania zadania. Ponadto tylko 4 osoby uznały wszystkie sposoby rozwiązania za poprawne.

Większość badanych (16 osób) rozwiązując zadanie 1 uznało, że pierwszy sposób rozwiązania podoba im się najbardziej. Badani uzasadniali swój wybór np. następująco:

– *Sposób 1 podoba mi się najbardziej, jest on poznany w szkole.*
– *Sposób 1 jest najbardziej mi się podobający, najbardziej poprawny, bo podał go nauczyciel na lekcji.*

Podobne wypowiedzi, do zaprezentowanych wyżej, można znaleźć w pozostałych 14 pracach. Jak wskazują wypowiedzi, przy wyborze sposobu rozwiązania uczniowie kierowali się faktem, iż rozwiązanie 1 było sposobem pracy poznanym przez nich na lekcjach matematyki.

Mniej niż połowa badanych (11 osób) uznała, że najbardziej podoba im się graficzny sposób rozwiązania zadania (sposób 2). Uczniowie uzasadniali swój wybór tym, że ta droga rozwiązania zadania jest „najszybsza”, zdaniem jednego z uczniów: *drugi sposób rozwiązania pozwala praktycznie natychmiast uzyskać odpowiedź.*

Tabela 1. Zestawienie dotyczące oceny poprawności poszczególnych sposobów rozwiązania zadania. Symbol P oznacza, że dany sposób uznano za poprawny, symbol N oznacza, że sposób został uznany za niepoprawny.

lp.	sposób 1	sposób 2	sposób 3	liczba osób
1	P	P	P	4
2	P	P	N	10
3	P	N	P	1
4	P	N	N	10
5	N	P	N	2
6	N	N	N	2

Tylko 2 badanych uznało iż najbardziej podoba im się trzecia z zaproponowanych możliwości rozwiązania zadania. Oto wypowiedzi tych uczniów:

– *Najbardziej podoba mi się sposób nr 3, gdyż jest on najłatwiejszy do zrozumienia i najkrótszy.*
– *Wszystkie trzy sposoby są poprawne, ale jeden z nich (sposób 2) jest niedokładny, tzn. jeśli choćby jeden z wykresów zostanie źle narysowany, cały wynik będzie zły. Można też mieć zastrzeżenia co do dokładności wyniku. Współrzędne punktu otrzymujemy w przybliżeniu, gdzie łatwo o pomyłkę. Najbardziej podoba mi się sposób nr 3, ponieważ jest najkrótszy i opiera się na twierdzeniach, a to znacznie ułatwia pracę i zmniejsza ilość obliczeń. Sposób 1 jest prosty, ale przy bardziej skomplikowanym równaniu jest bardzo dużo obliczeń i co za tym idzie, łatwiej można się pomylić.*

Z wypowiedzi pierwszego z tych uczniów wynika, iż wybrał on trzeci sposób rozwiązania zadania, gdyż takie rozwiązanie jest najkrótsze i najbardziej przejrzyste. Można przypuszczać, że drugi z uczniów wybrał trzeci sposób rozwiązania, gdyż pierwszy sposób jest pracochłonny, a drugi niejednokrotnie pozwala na odczytanie rozwiązania tylko w przybliżeniu. Z wypowiedzi ucznia nie wynika jednak, czy zdaje on sobie sprawę, jak rozwiązać inne równania metodą 3 i czy każde równanie da się rozwiązać w ten sam sposób.

Wyniki badań pozwoliły zwrócić naszą uwagę na duże trudności uczniów z czytaniem, analizowaniem i zrozumieniem tekstu matematycznego, jakim jest treść zadania. Wielu dydaktyków matematyki zwraca uwagę na rolę lektury tekstu matematycznego w procesie kształcenia.

> Tekst matematyczny ma specyficzną wśród innych tekstów budowę i wymaga specjalnych technik czytania. W toku jego lektury dochodzi do bezpośredniego kontaktu z osobliwym światem abstrakcji, z autentyczną materią matematyczną, odrębnym językiem, pojęciami występującymi w bogatych i swoistych kontekstach, dostosowaną do nich metodą badań. W procesie lektury takiego tekstu – jak w soczewce – skupiają się podstawowe aktywności matematyczne, stanowiące same w sobie przedmiot zainteresowań dydaktyki (...), szkoła ma przygotowywać do samodzielnego uczenia się, nie może więc pomijać nauki korzystania z podręcznika, w tym z tekstu matematycznego. Perspektywa ogólnego postępu i rozwoju świata o wiele wyraźniej niż przed kilkudziesięciu laty stawia przed szkołą zadania związane z przygotowaniem do samokształcenia.
>
> (Konior, 1995)

> Potrzeba nauki czytania różnych tekstów matematycznych jawi się coraz bardziej w perspektywie permanentnego uzupełniania wiedzy i konieczności samokształcenia w ciągu całego życia i aktywności zawodowej.
>
> (Konior, 1991)

Na umiejętność korzystania z tekstu matematycznego zwraca też uwagę B. J. Nowecki:

> Jednym z ważnych źródeł wiedzy matematycznej, jaką powinien uczeń zdobyć w szkole, jest tekst matematyczny zawarty przede wszystkim w podręcznikach szkolnych. Umiejętność korzystania z tego tekstu ma znaczenie nie tylko doraźne, ograniczające się do opanowania określonych wiadomości. Jest ona jednym z ważnych celów ogólnych nauczania matematyki. Chodzi o to, by uczeń, zdobywając i rozwijając ową umiejętność, odnosił korzyść podwójną:
>
> – z jednej strony poznawał nowe treści,
> – z drugiej uczył się samodzielnego uczenia się matematyki za pomocą lektury tekstu matematycznego.
>
> (Nowecki, 1984)

Wyniki badań pozwalają przypuszczać, że uczniowie nie są przygotowani do samodzielnego korzystania z informacji zawartych w tekście matematycznym. Wielu badanych miało trudności zarówno ze zrozumieniem poszczególnych etapów rozwiązania zadania jak i całej jego „idei”. Dodatkową przeszkodą w zrozumieniu rozwiązań zadań mogła być nieznajomość bądź niewłaściwe rozumienie przez uczniów pojęć występujących w przedstawionym tekście. O trudnościach mogą świadczyć następujące fragmenty prac uczniów:

– *Sposób 1 najbardziej mi odpowiada, ponieważ wykorzystuje definicję wartości bezwzględnej. Mimo to nie jest poprawny, ponieważ za x możemy* *podstawić wiele wartości, a nie tylko 1. Sposób 2 jest niepoprawny z tego samego powodu. Sposób 3 jest moim zdaniem niepoprawny. Występuje tutaj błąd. Występuje tam wnioskowanie, że skoro $2x \geqslant 1$ to $x \geqslant 0$. Jest to nieprawda, ponieważ skoro $2x \geqslant 1$ to $x \geqslant \frac{1}{2}$. Jeśli za x podstawimy np. $\frac{1}{4}$, co jest zgodne z wyrażeniem $x > 0$, to będzie to niezgodne z tym, że $2x \geqslant 1$. Myślę też, że nie jest ważne, ile znamy sposobów rozwiązania danego zadania, ale to czy znamy poprawny sposób.*

- *Moim zdaniem sposób trzeci jest sposobem błędnym, ponieważ $2x - 1$ nie jest większe od 0 dla $x \in \mathbb{R}$, np. $2 \cdot \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$.*
- *W pierwszym sposobie jest błąd, gdyż dla $x < 0$ równanie powinno wyglądać $-x = 2x - 1$, a nie $x = -(2x - 1)$. Drugi sposób jest poprawny. W trzecim sposobie jest błąd, gdyż po prawej stronie nie jest zawsze dodatnia dla $x < \frac{1}{2}$ prawa strona jest ujemna.*

Można przypuszczać, że autor pierwszego zaprezentowanego fragmentu pracy nie zrozumiał, iż w ostatniej fazie rozwiązania zadania sposobem 1 dokonano sprawdzenia, że otrzymany pierwiastek równania należy do jego dziedziny. Ten sam uczeń oceniając poprawność sposobu 3 nie zrozumiał idei rozwiązania, bazującej na tym, że ewentualne pierwiastki wyjściowego równania muszą być nieujemne (skoro po jednej stronie równania mamy $|x|$). Ponadto zdanie: „Stąd $2x \geqslant 1$, czyli $x > 0$" potraktował jak równoważność, co może wskazywać na braki w rozumieniu pojęcia równoważności oraz implikacji lub braki w umiejętności czytania tekstu matematycznego. Autorzy drugiego i trzeciego rozwiązania nie wzięli pod uwagę założeń, przy których prowadzone były rozumowania. Można ponadto przypuszczać, iż autor trzeciego rozwiązania zna definicję wartości bezwzględnej, nie dostrzega jednak faktu, że po pomnożeniu obu stron równania przez liczbę „-1" otrzymujemy równanie równoważne danemu.

Podsumowując analizę rozwiązania zadania 1 należy stwierdzić, że kilka osób biorących udział w badaniu zwróciło uwagę, że graficzny sposób rozwiązania zadania jest najszybszy (*szkicowanie wykresów odpowiednich funkcji pozwala najszybciej otrzymać rozwiązanie*), chociaż najmniej dokładny (*rozwiązanie możemy odczytać tylko w przybliżeniu*). Pozostałe dwa sposoby rozwiązania w opinii badanych pozwalają na uzyskanie dokładnego wyniku. Podstawową przyczyną wybierania pierwszej metody rozwiązania zadania jako podobającej się najbardziej, był fakt, iż ten sposób rozwiązania był poznany przez badanych na lekcjach matematyki w szkole. Można przypuszczać, iż pozostałe metody rozwiązywania równań nie były przez uczniow wykorzystywane (lub były stosowane sporadycznie).

Każdy z badanych podjął próbę rozwiązania zadania 2. Wszyscy uczniowie pracując nad zadaniem formułowali polecenie **rozwiązania równania z wartością bezwzględną różnymi sposobami**. W większości prac można było odnaleźć równania postaci:

$$|x| = ax - b,$$

gdzie a, b były liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Tylko jeden z badanych polecił rozwiązać równanie:

$$|x| = 3x + 2.$$

Uczniowie pracując nad wymyślonymi przez siebie zadaniami prezentowali od jednego do trzech rozwiązań. W ich pracach można zaobserwować ścisłą korelację pomiędzy prezentowaniem metod rozwiązania zadań a oceną poprawności metod rozwiązania zamieszczonych w zadaniu 1. Praktycznie wszyscy badani próbowali rozwiązać wymyślone przez siebie zadanie tymi metodami, które uznali za poprawne podczas pracy nad zadaniem 1.

Uczeń, który próbował rozwiązać równanie $|x| = 3x + 2$, przedstawił rozwiązanie graficzne oraz algebraiczne oparte na metodzie równań równoważnych z wykorzystaniem definicji wartości bezwzględnej. Próbując rozwiązać równanie metodą pojęciową (sposób 3), natrafił na trudności (z faktu, że $3x \geqslant -2$ nie mógł wyciągnąć wniosku, że $x > 0$). Jak sam stwierdził: *zadania nie da się tak rozwiązać nie modyfikując postępowania. 3 sposób rozwiązania nie może być stosowany do wszystkich równań.*

Można przypuszczać, iż badany uczeń zrozumiał ideę zaprezentowanego sposobu rozwiązania (sposób 3) oraz dostrzegł fakt, że może on być stosowany tylko dla określonych typów równań z wartością bezwzględną.

Analizując prace uczniów stwierdziliśmy, że 27 osób podjęło próbę rozwiązania zadania 3. Bardzo wielu badanych pracując nad zadaniami posługiwało się metodą równań równoważnych z jednoczesnym rozważaniem przypadków wynikających z definicji wartości bezwzględnej. Tylko nieliczne osoby próbowały rozwiązać równania graficznie lub wykorzystały twierdzenia o wartości bezwzględnej. W zadaniu 3a tylko dwie osoby szkicowały wykresy odpowiednich funkcji. W pozostałych zadaniach (3b i 3c) ta metoda rozwiązania nie pojawiła się w ogóle. Ponadto 9 osób w zadaniu 3b oraz 9 osób w zadaniu 3c wykorzystało do rozwiązania własność wartości bezwzględnej (tj. jej nieujemność). Pozostałe zadania były rozwiązywane przez badanych metodą równań równoważnych z jednoczesnym stosowaniem definicji wartości bezwzględnej. Analiza prac pozwala przypuszczać, że niektórym uczniom nie towarzyszyła głębsza refleksja nad treścią zadania, wykonywali oni tylko algorytmicznie skończony ciąg czynności. Znamiennym jest też, że większość osób rozwiązując zadania 3a, 3b i 3c tą metodą nie uzyskała poprawnych odpowiedzi. Osoby te popełniły różne błędy. Wiele z nich związanych było ze stosowaniem definicji wartości bezwzględnej, a dokładniej z ograniczeniem zakresu stosowalności poszczególnych wzorów.

Oto przykładowe fragmenty prac trzech badanych uczniów, ilustrujące popełnione przez nich błędy:

$$|2x+4| = \begin{cases} 2x+4, & \text{gdy } x \geqslant 0, \\ -2x-4, & \text{gdy } x < 0; \end{cases}$$

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{dla } x > 0, \\ -x+3 & \text{dla } x < 0; \end{cases}$$

$$|2x+4| + |3x-6| = 0 \iff \begin{cases} 2x+4+3x-6=0, & \text{gdy } x \geqslant 0, \\ -2x-4-3x+6=0, & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

Można przypuszczać, że uczniowie inaczej odczytywali tę samą zmienną w stosowanej definicji wartości bezwzględnej, co może świadczyć o brakach w wiedzy dotyczących omawianego pojęcia.

2.3. Podsumowanie wyników badań

Podsumowując można stwierdzić, że badanie ukazało wątpliwości uczniów co do poprawności poszczególnych metod (jak i ich elementów) rozwiązywania równań z wartością bezwzględną oraz ujawniło braki w wiedzy i umiejętnościach u badanych osób. Zaobserwowane trudności wskazały nam elementy rozwiązań zadań, na które naszym zdaniem należałoby zwrócić baczniejszą uwagę podczas omawiania podobnych zagadnień z uczniami i studentami matematyki. Należą do nich:

1. definicja wartości bezwzględnej, a w tym zakres stosowalności poszczególnych wzorów,
2. zagadnienia logiki matematycznej (rozumienie i używanie symboli: alternatywy i koniunkcji warunków, implikacji oraz równoważności),
3. sprawdzanie przynależności otrzymanych rozwiązań do dziedziny równania.

Z analizy wytworów działania licealistów oraz badań prowadzonych wśród studentów matematyki Akademii Pedagogicznej w Krakowie (por. wyniki badań J. Major, M. Major, 2005) wynika, że większość osób rozwiązuje równania z wartością bezwzględną metodą równań równoważnych z jednoczesnym rozważaniem przypadków związanych z zakresem stosowalności wzorów, a więc krótko mówiąc, stosuje poznany w szkole algorytm. Wyniki badań pozwalają przypuszczać, że część uczniów rozwiązujących równania z wartością bezwzględną tą metodą nie ma świadomości stosowania definicji wartości bezwzględnej, a jedynie powiela poznany w szkole schemat rozwiązania tego typu zadań. Omawiany sposób rozwiązania jest wybierany często w przypadkach, gdy jest on całkowicie nieefektywny. Należy też dodać, iż metoda pojęciowa rozwiązywania równań nie jest powszechnie znana i stosowana zarówno przez uczniów szkół średnich, jak i studentów studiów matematycznych. Zaobserwowane podejście do rozwiązywania zadań może świadczyć o tym, że pojęcie wartości bezwzględnej nie było opracowywane u badanych uczniów podczas nauki w szkole w sposób spiralny (badani w większości nie znali rozumowań pojęciowych, rzadko także rozwiązywali równania w sposób graficzny). Na trudności wynikające z takiego opracowywania pojęć zwraca uwagę Z. Krygowska stwierdzając, że

> ... skrajne eksponowanie schematów o charakterze algorytmicznym bez równoczesnego wprowadzenia ucznia w myślenie pojęciowe, w globalnie ujmowanej sytuacji, może być nawet hamulcem w rozwijaniu jego matematycznego myślenia.
>
> (Krygowska, 1977a)

Badania wzmocniły nasze przekonanie, że metoda pojęciowa rozwiązywania równań może być dla uczniów zrozumiała, a zatem można i warto uczniów z nią zaznajamiać.

Jak ukazują wyniki przeprowadzonych badań, opracowywanie w szkole metod rozwiązywania równań z wartością bezwzględną powoduje niekiedy jednostronne kształtowanie się w umysłach uczniów schematów poznawczych. Posługiwanie się przez uczniów pojęciem często zostaje sprowadzane do bezmyślnego wykonywania przez nich krok po kroku algorytmu związanego z rozwiązywaniem równań z wartością bezwzględną (metoda równań równoważnych), bez refleksji nad koniecznością wykonywania określonych przekształceń.

Wyniki badań stały się bodźcem do zbudowania zestawu zadań i problemów (omówionych w kolejnym paragrafie) przeznaczonych w zależności od stopnia trudności dla uczniów różnych szczebli kształcenia matematycznego.

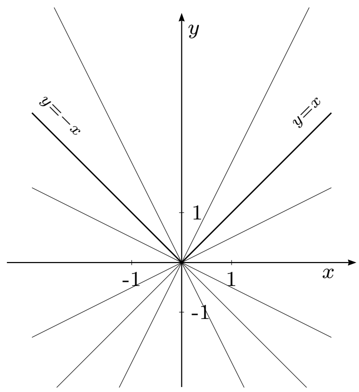
3. Propozycja dydaktyczna

W tej części artykułu podamy pewną propozycję dydaktyczną, przeznaczoną zarówno dla nauczycieli szkół średnich, jak i nauczycieli akademickich nauczycielskich kierunków studiów matematycznych, związaną z rozwijaniem rozumienia pojęcia wartości bezwzględnej. Zostaną tu przedstawione przykładowe zadania, które w klasyfikacji Z. Krygowskiej należy zaliczyć do zadań metodologicznych, ponieważ

> ... zawierają one elementy matematycznej metody. Chodzi w nich nie tylko o dowodzenie, ale i o takie czynności, jak klasyfikowanie, uogólnianie, specyfikacja [...], upraszczanie rozumowania przez przejście do innego modelu lub wybór innych zmiennych, wykorzystanie izomorfizmu lub homomorfizmu struktur.
>
> (Krygowska, 1977a)

Przedstawione zagadnienia mogą być rozważane z uczniami uczęszczającymi do klas o profilu matematycznym szkół ponadgimnazjalnych, na kółkach matematycznych w szkołach średnich lub też na zajęciach z analizy matematycznej na pierwszych latach studiów matematycznych. Przedstawione w poprzednim paragrafie zadania (narzędzia badawcze) mogą stać się punktem wyjścia do prowadzenia bardziej ogólnych rozważań, w których szczególną uwagę będziemy zwracać na prowadzenie rozumowań pojęciowych.

Pojawia się tutaj naturalne pytanie: czy każde równanie postaci $|x| = ax$, gdzie $x \in \mathbb{R}$ oraz a jest dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą, ma jedno rozwiązanie? Jeśli nie, to od czego zależy liczba rozwiązań tego równania? Oczywiste jest, że liczba tych rozwiązań zależy od wartości rzeczywistego parametru a. Dla $a = 1$ lub $a = -1$ równanie $ax = |x|$ ma nieskończenie wiele rozwiązań. Dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ równanie $ax = |x|$ ma dokładnie jedno rozwiązanie, $x = 0$ (por. rys. 2).

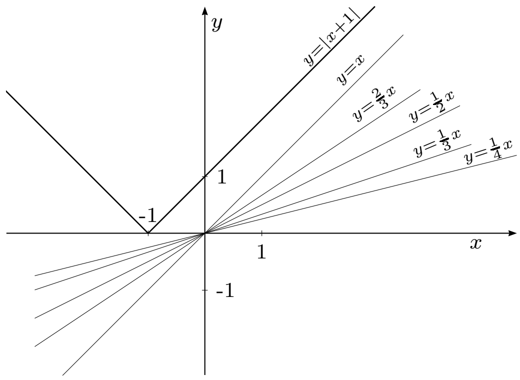


Rysunek 2

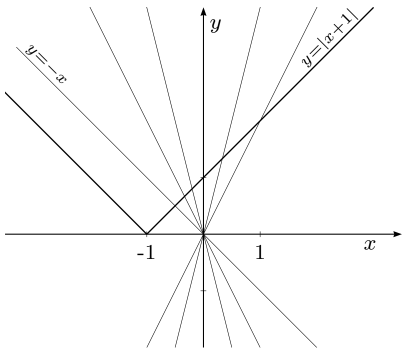
Cenną pomocą dydaktyczną podczas pracy nad tym zadaniem może być kalkulator graficzny lub odpowiedni program komputerowy, przy pomocy którego uczniowie mogą obserwować wzajemne położenie wykresów funkcji $y = |x|$ oraz $y = ax$, w zależności od wartości rzeczywistego parametru a. Opisane wyżej problemy warto też sformułować dla równań postaci $f(x) = |x|$, gdzie f jest funkcją określoną w $\mathbb{R}$ o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych.

Przedłużając wyjściowy problem można określać liczbę rozwiązań równania $ax = |x + 1|$, w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$. Na podstawie obserwacji wzajemnego położenia wykresów funkcji $y = |x + 1|$ oraz $y = ax$, w zależności od wartości rzeczywistego parametru a, można formułować hipotezy dotyczące liczby rozwiązań równania $ax = |x + 1|$ dla $a \in \mathbb{R}$. Następnym etapem pracy nad zadaniem jest ich dowodzenie.

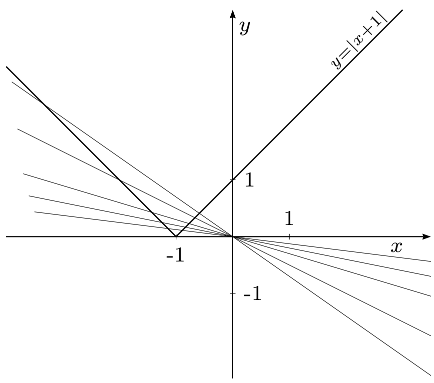
Na podstawie obserwacji wykresów funkcji możemy sformułować hipotezę: równanie nie ma rozwiązań dla $a \in (0, 1]$; dla $a = 0$, $a \leqslant -1$ i $a > 1$ ma dokładnie jedno rozwiązanie, zaś dla $a \in (-1, 0)$ ma dwa rozwiązania (por. rys. 3, 4, 5).



Rysunek 3



Rysunek 4



Rysunek 5

Rozważmy przypadek, gdy $a \in (0,1]$. Zauważmy, iż prawa strona równania $ax = |x+1|$ dla $a \in \mathbb{R}$ jest nieujemna. Wyjściowe równanie ma rozwiązanie, gdy $ax \geqslant 0$. Wobec założenia mamy $x \geqslant 0$, czyli $x+1>0$, zatem $|x+1| = x+1$. Zbiór rozwiązań równania wyjściowego jest równy zbiorowi rozwiązań równania

$$ax = x + 1 \qquad \text{dla } x \geqslant 0. \tag{1}$$

Jak łatwo sprawdzić, równanie (1) nie ma rozwiązań, zatem dla $a \in (0,1]$ równanie $ax = |x+1|$ nie ma rozwiązań.

Podobnie dowodzimy, że równanie to dla $a = 0$ oraz $a \leqslant -1$ oraz $a > 1$ ma jedno rozwiązanie, zaś dla $a \in (-1, 0)$ dwa rozwiązania.

Naturalnym uogólnieniem omawianych wyżej problemów jest badanie liczby rozwiązań równania $ax = |bx + c|$ w zależności od wartości rzeczywistych parametrów a, b, c. Zauważmy, że sformułowane wyżej problemy są otwarte, zarówno ze względu na możliwe metody rozwiązania, jak i ze względu na nowe problemy, które można stawiać.

Rozważane poprzednio przykłady są szczególnymi przypadkami równania

$$|f(x)| = g(x), \tag{2}$$

gdzie $f\colon D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ są danymi funkcjami rzeczywistymi, a zbiory D_1, D_2 są niepustymi podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych. Ciekawym problemem dydaktycznym wydaje się być dyskutowanie warunków koniecznych i wystarczających na to, aby równanie (2) miało rozwiązanie. Rozważając ten problem uczeń ma okazję zetknąć się z istotnymi problemami matematyki (zagadnienia istnienia rozwiązań równania w zbiorze liczb rzeczywistych). Aby równanie miało rozwiązanie, zbiory D_1 i D_2 muszą mieć niepustą część wspólną. Ponadto stąd i z definicji wartości bezwzględnej wynika, że warunkiem koniecznym istnienia rozwiązania jest niepustość zbioru

$$A = \{x \in D_1 \cap D_2 :\ g(x) \geqslant 0\}. \tag{3}$$

Spostrzeżenie to możemy zapisać w postaci twierdzenia:

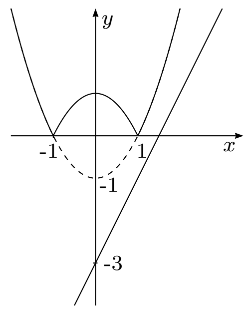
Twierdzenie 1
Jeżeli równanie (2) *ma rozwiązanie, to zbiór A określony warunkiem* (3) *nie jest pusty.*

Zauważmy ponadto, iż wszystkie rozwiązania równania (2) muszą należeć do zbioru A. Zapytajmy, czy warunek ten jest wystarczający na to, by równanie (2) posiadało rozwiązanie. W tym celu rozważmy następujący przykład.

Przykład 1
Rozważmy równanie

$$|x^2 - 1| = 2x - 3, \tag{4}$$

będące szczególnym przypadkiem równania (2), w którym $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 2x - 3$ oraz $D_1 = D_2 = \mathbb{R}$. Zgodnie z twierdzeniem 1, warunkiem koniecznym istnienia rozwiązania równania (4) jest niepustość zbioru A, który w tym przypadku jest przedziałem $[\frac{3}{2}, \infty)$. Zbadajmy, czy w zbiorze A istnieje rozwiązanie równania. Naszkicujmy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = x^2 - 1$, $|f(x)| = |x^2 - 1|$ oraz $g(x) = 2x - 3$ (por. rys. 6).



Rysunek 6

Analizując sytuację przedstawioną na tym rysunku, stawiamy hipotezę, że równanie (4) nie ma rozwiązania, ponieważ wykresy funkcji $|f|$ oraz g nie mają punktów wspólnych w zbiorze A. Aby zweryfikować naszą hipotezę, wystarczy rozwiązać równanie (4). Dla $x \in [\frac{3}{2}, \infty)$ równanie to przyjmuje postać $x^2 - 2x + 2 = 0$, jak łatwo sprawdzić, nie ma ono rozwiązania.

Zauważmy ponadto, że wykresy funkcji f i g także nie mają punktów wspólnych.

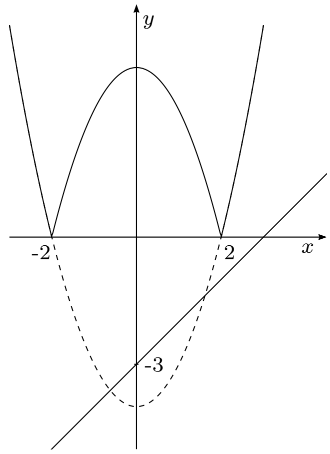
Zapytajmy zatem, czy warunkiem wystarczającym istnienia rozwiązania równania (2) jest przecinanie się wykresów funkcji f oraz g. W poszukiwaniu odpowiedzi na to pytanie rozważmy poniższy przykład.

Przykład 2
Rozstrzygnij, czy istnieje rozwiązanie równania

$$|x^2 - 4| = x - 3. \tag{5}$$

W równaniu (5) mamy: $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = x - 3$, $D_1 = D_2 = \mathbb{R}$ oraz zbiór $A = [3, +\infty) \neq \emptyset$. Wynika stąd, że warunek konieczny istnienia rozwiązania równania jest spełniony. Na rysunku 7 przedstawiono wykresy funkcji $f(x) = x^2 - 4$, $|f(x)| = |x^2 - 4|$ oraz $g(x) = x - 3$.

Analizując sytuację na tym rysunku, formułujemy, hipotezę: pomimo że wykresy funkcji f i g przecinają się (i to w dwu punktach), to równanie (5) nie ma rozwiązania. Jest tak dlatego, że pierwiastki równania $x^2 - x - 1 = 0$ nie należą do przedziału $[3, +\infty)$.



Rysunek 7

Poniżej sformułowane twierdzenie 2 podaje warunek wystarczający na to, by równanie (2) miało rozwiązanie.

Twierdzenie 2
Jeżeli dla funkcji $f\colon D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon D_2 \longrightarrow R$ *zbiór* $D_1 \cap D_2$ *jest niepusty i równanie*

$$f(x) = g(x) \tag{6}$$

ma rozwiązanie x_0 *należące do zbioru* $A = \{x \in D_1 \cap D_2 : \ g(x) \geqslant 0\}$, *to* x_0 *jest także rozwiązaniem równania* $|f(x)| = g(x)$.

Dowód. Załóżmy, że x_0 jest rozwiązaniem równania (6) i $x_0 \in A$. Wtedy zachodzą warunki: $f(x_0) = g(x_0)$ i $g(x_0) \geqslant 0$. Wynika stąd, że również $f(x_0) \geqslant 0$, czyli $|f(x_0)| = f(x_0)$. Zatem liczba x_0 spełnia równanie (2), tzn. $|f(x_0)| = g(x_0)$.

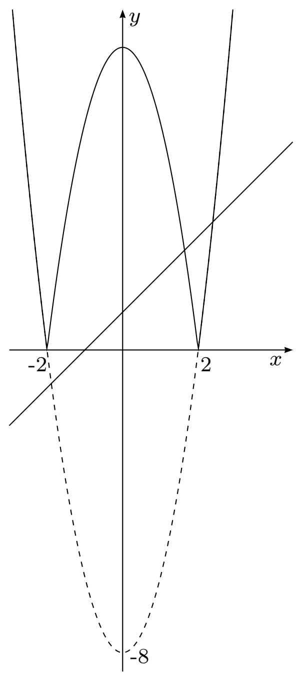
Zaprezentowany dowód, wykorzystujący jedynie założenia twierdzenia i definicję wartości bezwzględnej, może być dobrym przykładem do pokazania uczniom, na czym polega metoda dedukcji. Twierdzenie 2 ma prostą interpretację geometryczną. Zauważmy, że jeżeli wykresy funkcji f i g mają punkty wspólne oraz odcięte tych punktów należą do zbioru tych argumentów z części wspólnej dziedzin funkcji f i g, dla których funkcja g przyjmuje wartości nieujemne, to rzędne tych punktów spełniają równanie (2). Fakt ten ilustruje następujący przykład.

Przykład 3
Wyznaczyć, o ile istnieją, rozwiązania równania

$$|2x^2 - 8| = x + 1. \tag{7}$$

W rozważanym przykładzie mamy: $f(x) = 2x^2 - 8$, $g(x) = x + 1$, $D_1 = D_2 = \mathbb{R}$ oraz zbiór $A = [-1, +\infty) \neq \emptyset$.

Równanie $2x^2 - 8 = x + 1$ jest równoważne równaniu $2x^2 - x - 9 = 0$ i ma dwa rozwiązania $x_1 = \frac{1-\sqrt{73}}{4} < -1$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{73}}{4} > -1$. Zatem zgodnie z twierdzeniem 2 tylko liczba x_2 spełnia równanie (7). Analiza rysunku 8 pozwala stwierdzić, że istnieje również pierwiastek równania (7), który nie spełnia równania $2x^2 - x - 9 = 0$. Oznacza to, że twierdzenie 2 nie opisuje wszystkich rozwiązań równania (2). Jest zatem tylko warunkiem wystarczającym, a nie jest warunkiem koniecznym istnienia rozwiązania.



Rysunek 8

W dalszej części omówimy kilka szczególnych równań typu (2). Powstają one w wyniku specyfikacji funkcji f lub g. Połóżmy w równaniu (2): $f(x) = x$, wtedy $D_1 = \mathbb{R}$. Równanie (2) przyjmie więc postać

$$|x| = g(x). \tag{8}$$

Dla równania (8) udowodnimy następujący warunek konieczny i wystarczający istnienia rozwiązania.

Twierdzenie 3
Niech $g\colon D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ oznacza funkcję, dla której zbiór $A = \{x \in D_2 :\ g(x) \geqslant 0\}$ jest podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych nieujemnych. Równanie (8) *ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja g ma punkt stały w zbiorze $A \neq \emptyset$.*

Dowód. Niech funkcja $g\colon D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia założenia twierdzenia. Załóżmy najpierw, że równanie (8) ma rozwiązanie. Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami mamy $D_1 = \mathbb{R}, D_1 \cap D_2 = D_2$. Z twierdzenia 1 wynika, że zbiór $A = \{x \in D_2 :\ g(x) \geqslant 0\}$ jest niepusty. Ponieważ $A \subset [0,\infty)$, to istnieje $x_0 \in A$ i $x_0 \geqslant 0$. Zatem na mocy definicji wartości bezwzględnej z warunku (8) dostajemy równość $x_0 = g(x_0)$, co oznacza, że x_0 jest punktem stałym funkcji g.

Załóżmy obecnie, że funkcja g ma punkt stały w zbiorze A. Istnieje zatem nieujemna liczba x_0 taka, że $x_0 = g(x_0)$. Stąd i z definicji wartości bezwzględnej wynika, że x_0 jest rozwiązaniem równania (8).

Z twierdzenia 3 wynika, że jeśli $A \subset [0,\infty)$, to każde rozwiązanie równania (8) jest punktem stałym funkcji g i każdy punkt stały funkcji g jest rozwiązaniem tego równania.

Poniższy przykład ilustruje istotność założenia, że zbiór A zawiera się w zbiorze liczb rzeczywistych nieujemnych.

Przykład 4
Wykazać, że równanie

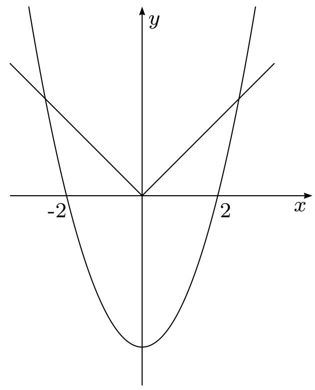
$$|x| = x^2 - 4 \tag{9}$$

ma rozwiązanie, które nie jest punktem stałym funkcji $g(x) = x^2 - 4$.

Równanie (9) jest szczególnym przypadkiem równania (8), w którym funkcja $g(x) = x^2 - 4$, zbiór $D_2 = \mathbb{R}$ oraz zbiór $A = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ nie zawiera się w zbiorze liczb rzeczywistych nieujemnych.

Funkcja g ma dwa punkty stałe: $x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{2} < 0$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2} > 0$. Liczba x_2 jest rozwiązaniem równania (9). Natomiast liczba x_1 nie spełnia równania (9). Równanie to ma jeszcze rozwiązanie $x_3 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < 0$, które nie jest punktem stałym funkcji g (por. rys. 9).

Kolejny przykład szczególnego przypadku równania (2) posłuży do sformułowania pewnej własności funkcji definiowanej przy pomocy wartości bezwzględnej.



Rysunek 9

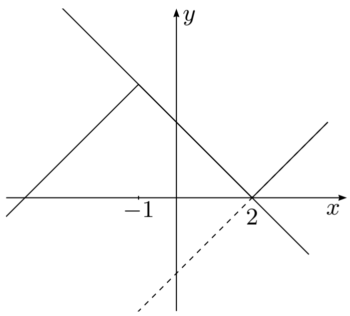
PRZYKŁAD 5
Połóżmy w równaniu (2): $f(x) = x-2$ i $g(x) = 3-|x+1|$. Równanie to przyjmie wtedy postać

$$|x-2| = 3 - |x+1| \tag{10}$$

lub równoważną jej

$$|x-2| + |x+1| = 3. \tag{11}$$

Z twierdzenia 1 wynika, że rozwiązanie równania (10) może należeć jedynie do zbioru $A = [-4, 2]$, bo w tym zbiorze funkcja g jest nieujemna (por. rys. 10).

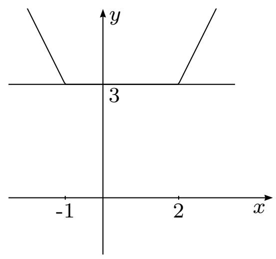


Rysunek 10

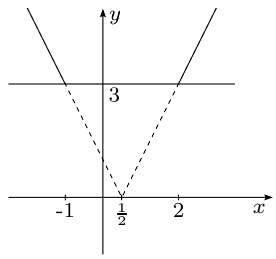
Zauważmy, że dla $x \in [-1, 2]$ funkcje $|f|$ i g przyjmują takie same wartości. Zgodnie z twierdzeniem 2 liczby z przedziału $[-1, 2]$ spełniają równanie (10).

Na rysunku 11 przedstawiono wykresy funkcji $f_1(x) = |x-2| + |x+1|$ oraz $g_1(x) = 3$. Analizując sytuację przedstawioną na tym rysunku, stwierdzamy, że lewa strona równania (11) jest funkcją stałą w przedziale $[-1, 2]$; dla $x > 2$

ma ona postać: $y = 2x - 1$, a dla $x < -1$ postać: $y = -2x + 1$. Przedłużając obie półproste na rysunku 11 aż do punktu ich przecięcia otrzymamy wykres funkcji $y = |2x - 1|$ (por. rys. 12).



Rysunek 11



Rysunek 12

Zauważmy, że wartości funkcji $y = |x + 1| + |x - 2|$ dla poszczególnych argumentów $x \in \mathbb{R}$ są równe wartościom funkcji $y = \max(|2x - 1|, 3)$ (rys. 12), czyli dla każdej liczby rzeczywistej zachodzi równość $|x + 1| + |x - 2| = \max(|2x - 1|, 3)$.

Aby udowodnić otrzymaną w przykładzie 5 równość dla dowolnych dwu funkcji liniowych o tym samym, co do wartości bezwzględnej, współczynniku kierunkowym, wykorzystamy następującą własność wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.

Twierdzenie 4
Jeżeli p oraz q są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to zachodzi równość

$$|p| + |q| = \max(|p + q|, |p - q|). \tag{12}$$

Dowód. Dowód twierdzenia można otrzymać posługując się nierównościami $||p| - |q|| \leqslant |p + q| \leqslant |p| + |q|$ i rozważając stosowne przypadki odnośnie znaków liczb p oraz q.

Z twierdzenia 4 wynika następujący wniosek.

Twierdzenie 5
Jeżeli a, b, c są liczbami rzeczywistymi, to dla każdej rzeczywistej liczby x zachodzi równość

$$|ax + b| + |ax + c| = \max(|2ax + b + c|, |b - c|). \tag{13}$$

Wzór (13) zastosujemy do rozwiązania równania postaci

$$|ax + b| + |ax + c| = m, \tag{14}$$

gdzie a, b, c, m są danymi liczbami rzeczywistymi i $m \geqslant 0$.

Z twierdzenia 5 wynika następujący warunek na istnienie rozwiązań tego równania.

Twierdzenie 6
a) *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na istnienie rozwiazań równania* (14) *jest spełnianie nierówności*

$$|b - c| \leqslant m. \tag{15}$$

b) *Przy warunku* $|b - c| < m$ *równanie* (14) *równoważne jest równaniu*

$$|2ax + b + c| = m, \tag{16}$$

gdzie a, b, c, m j.w.

Prosty dowód tego twierdzenia pozostawiamy Czytelnikowi. Zauważmy tu jedynie, że twierdzenie to pozwala w istotny sposób skrócić proces rozwiazywania równania typu (14). Zamiast rozważać stosowne przypadki wystarczy po zbadaniu warunku (15) sprowadzić badane równanie do postaci (16) i je rozwiązać. Łatwo również stwierdzić, że:

– jeżeli $a = 0$ i $|b + c| = m$, to rozwiązaniem równania (14) jest zbiór liczb rzeczywistych;
– jeżeli $a \neq 0$ i $|b - c| = m$, to rozwiązaniem równania (14) są wszystkie liczby należące do przedziału $[\frac{-m-b-c}{2a}, \frac{m-b-c}{2a}]$;
– jeżeli $a \neq 0$ i $|b - c| < m$, to równanie (14) ma tylko dwa rozwiązania $x_1 = \frac{-m-b-c}{2a}$ lub $x_2 = \frac{m-b-c}{2a}$;
– jeżeli $|b - c| > m$, to równanie (14) nie ma rozwiązania.

Przykładem równania typu (14) jest równanie (11), w którym $a = 1, b = -2$, $c = 1$ oraz $m = 3$. Ponieważ $|b - c| = 3$, więc spełniony jest warunek (15). Rozwiązaniem równania jest przedział domknięty i ograniczony. Aby wyznaczyć jego krańce, rozwiążemy równanie (16), tzn. równanie $|2x - 1| = 3$. Pierwiastkami tego równania są liczby $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Zatem w świetle powyższych uwag rozwiązaniem równania (11) jest przedział $[-1, 2]$ (por. przykład 5).

Podsumowując zauważmy, że przestawione rozważania mogą stać się inspiracją do formułowania dalszych przykładów, stawiania hipotez oraz dowodzenia twierdzeń o wartości bezwzględnej, a więc do prowadzenia ścisłych rozumowań matematycznych, często nieszablonowych i niealgorytmicznych. Rozważania te prowadzone są na stosunkowo prostym materiale teoretycznym, dostępnym już uczniowi szkoły średniej. Można też rozważać problemy trudniejsze, co powoduje, że zagadnienia te mogą być interesujące także dla studentów nauczycielskich kierunków studiów matematycznych. Dodatkowym powodem, dla którego wydaje się być istote rozważanie tych zagadnień ze studentami, jest fakt, iż w przyszłości to oni będą przekazywać wiedzę swoim uczniom.

Literatura

Bryński, M., Dróbka, N., Szymański, K.: 2002, *Matematyka, program nauczania w liceum ogólnokształcącym, kształcenie w zakresie rozszerzonym*, WSiP, Warszawa.

Kłaczkow, K., Kurczab, K., Świda, E.: 2000a, *Matematyka dla licealistów, klasa I*, Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, Warszawa.

Kłaczkow, K., Kurczab, K., Świda, E.: 2000b, *Program nauczania w liceach ogólnokształcących, zakres podstawowy*, Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, Warszawa.

Kłaczkow, K., Kurczab, K., Świda, E.: 2000c, *Program nauczania w liceach ogólnokształcących, zakres rozszerzony*, Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, Warszawa.

Konior, J.: 1991, Praca z tekstem matematycznym w nauczaniu szkolnym, w: B. Rabijewska (red.), *Wybrane ćwiczenia z dydaktyki matematyki*, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław, 23-36.

Konior, J.: 1995, Badania nad tekstem matematycznym i jego lekturą – stan obecny i perspektywy, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **17**, 109-133.

Krygowska, Z.: 1977a, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 1*, WSiP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1977b, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 3*, WSiP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1981, *Koncepcje powszechnego matematycznego kształcenia w reformach programów szkolnych lat 1960-1980*, Wydawnictwo Naukowe WSP w Krakowie, Kraków.

Kucharczyk, S.: 1998, Wokół zadania matematycznego, w: B. Rabijewska (red.), *Materiały do zajęć z dydaktyki matematyki*, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław, 25-54.

Major, J., Major, M.: 2005, Some remarks on students' knowledge of the absolute value, *Mathematica, Proceedings of the XI*$^{\text{th}}$ *Slovak–Czech–Polish Mathematical School*, 116-121.

Nowak, W.: 1989, *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa.

Nowecki, B. J.: 1984, Lektura tekstu matematycznego na przykładzie zadań, *Oświata i wychowanie* **15** (Wersja B), 48-52. Także *w:* Żabowski J. (red.), *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, część II*, Wyd. Nauk. Novum, Płock, 2001, 71-80.

Łobocki, M.: 1984, *Metody badań pedagogicznych*, PWN, Warszawa.

Szuty, J., Jakubas, E., Nodziński, P.: 2002, *Matematyka Przyjemna i Pożyteczna, przewodnik metodyczny klasa I, szkoły ponadgimnazjalne zakres podstawowy*, Wydawnictwa Szkolne PWN, Warszawa.

Treliński, G.: 2002a, *Matematyka dziś, podręcznik dla klasy 1 liceum ogólnokształcącego, profilowanego i technikum*, Wydawnictwo Kleks, Bielsko-Biała.

Treliński, G.: 2002b, *Matematyka dziś, przewodnik metodyczny dla klasy 1 liceum ogólnokształcącego, profilowanego i technikum*, Wydawnictwo Kleks, Bielsko-Biała.

Treliński, G.: 2002c, *Matematyka dziś, zbiór zadań dla klasy 1 liceum ogólnokształcącego, profilowanego i technikum*, Wydawnictwo Kleks, Bielsko-Biała.

Trzeciak, M.: 2002, *Matematyka. Program nauczania w liceum ogólnokształcącym, liceum profilowanym i technikum, kształcenia w zakresie podstawowym*, WSiP, Warszawa.

Turnau, S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.

Instytut Matematyki
Akademia Pedagogiczna
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: jmajor@ap.krakow.pl
e-mail: powazka@ap.krakow.pl