Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis
Folia 36 Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia I (2006)

Mirosława Sajka

Refleksje na temat określania wiedzy przedmiotowej nauczycieli matematyki

Abstract. This article presents the author's reflections, comments and problems that arise in relation to the issue of defining the subject matter knowledge a teacher should have in the context of Even's theoretical framework. They incline to start working on a considerable modification of this conception in order to explore its adaptability in other contexts. This paper also includes initial results of this modification.

1. Wprowadzenie

Czy wiedza przedmiotowa przeciętnego przyszłego nauczyciela matematyki jest zadowalająca? Jaką wiedzą przedmiotową powinien dysponować, aby uczyć o poszczególnych pojęciach matematycznych?

Istnieje potrzeba stworzenia takiej koncepcji, która określi nauczycielską wiedzę przedmiotową. Pomogłaby ona w ulepszaniu procesu przygotowywania matematycznego przyszłych nauczycieli, a także w konstruowaniu i analizie badań nad wyposażeniem przyszłych nauczycieli w tę wiedzę. Celowe wydaje się rozważanie wiedzy przedmiotowej nauczycieli w kontekście wybranego pojęcia. Dla matematyki jako dyscypliny naukowej jest bowiem charakterystyczne, że to właśnie pojęcia same w sobie są przedmiotem badań.

Nauczyciel matematyki podczas swej pracy boryka się z problemami ontologicznymi – wszak uczy o bytach istniejących jedynie w umyśle człowieka, o bytach, których nie może pokazać uczniom. Organizując proces kształtowania poszczególnych pojęć u uczniów dobiera rozmaite metody i środki dydaktyczne, konstruuje przykłady i kontrprzykłady. Poprzez tego typu działania ukazuje uczniom – zazwyczaj nieświadomie – swój własny *obraz kształtowanych pojęć*. Termin *obraz pojęcia (concept image)* definiuje S. Vinner (1983) następująco[1]:

[1] Termin ten jest zdefiniowany również w (Tall, Vinner, 1981).

> Wyjaśnijmy najpierw, jak rozumiemy termin *wyobrażenie pojęcia*[2] (*mental picture of concept*). Niech P oznacza pojęcie, a O oznacza pewną osobę. Wówczas wyobrażeniem pojęcia P u danej osoby O jest zespół wszystkich obrazów, które kiedykolwiek były związane z pojęciem P w umyśle osoby O. (Ta definicja została po raz pierwszy podana w pracy (Vinner, 1975, s. 339)
> Słowo „obraz" jest tutaj użyte w najszerszym jego znaczeniu i zawiera wszelkie wizualne reprezentacje tego pojęcia, a nawet symbole. W przypadku pojęcia funkcji w czyimś wyobrażeniu pojęcia mogą być połączone: wykres konkretnej funkcji i symbole "$y = f(x)$" wraz z wieloma innymi wyobrażeniami o funkcjach.
> Oprócz wyobrażenia pojęcia może występować też zespół cech związanych z pojęciem (w umyśle naszej osoby P). (...) Na przykład ktoś może uważać, że funkcje zawsze powinny być zdefiniowane w formie wyrażeń algebraicznych. Ten zestaw własności razem z wyobrażeniem pojęcia jest określany jako *obraz pojęcia*[3] (*concept image*).
> Jest oczywistym, że oba zdefiniowane terminy zależą od osoby, o której mówimy.
>
> (Vinner, 1983, s. 293)

Warto więc dołożyć wszelkich starań, aby ukształtować u przyszłego nauczyciela jak najlepszy obraz pojęć matematycznych. Niektóre spośród pojęć są kluczowe dla matematyki i dla jej nauczania w szkole. Przykładem takiego pojęcia jest z pewnością funkcja (wśród innych można by wymienić takie jak: liczba rzeczywista, równania wraz z metodami ich rozwiązywania, granica i ciągłość funkcji itd.). Są to zazwyczaj pojęcia, o których student uczy się na różnych zajęciach i którymi wciąż operuje. Jednak jego wiedza z zakresu tych pojęć nie jest sprawdzana kompleksowo, a jedynie w kontekście danego przedmiotu[4].

Zbyt rzadko podejmowane są prace naukowe związane z określaniem i badaniem *nauczycielskiej wiedzy przedmiotowej*. Przez termin ten rozumiem wyposażenie nauczycieli w wiedzę i umiejętności z zakresu matematyki abstrakcyjnej i jej metod oraz elementarną wiedzę związaną z historycznym rozwojem pojęć matematycznych nauczanych w szkole.

Z dostępnej mi literatury anglojęzycznej można wymienić tu artykuł R. Even (1990), w którym podjęto próbę określenia nauczycielskiej wiedzy przedmiotowej z zakresu wybranego pojęcia matematycznego. Nie jest to opracowanie najnowsze, ale wydaje się wciąż aktualne. Świadczy o tym chociażby fakt, iż jest ono przywoływane w najnowszych publikacjach o międzynarodowym zasięgu, poruszających zarówno tematykę dotyczącą kształce-

[2] Wyróżnienie w cytacie – M. Sajka.
[3] Wyróżnienie w cytacie – M. Sajka.
[4] Ostatnio podjęte zostały badania diagnostyczne nad rozumieniem wybranych pojęć matematycznych przez studentów (np. Bugajska-Jaszczołt, Treliński, 2002; Major, Powązka, 2006; Powązka, 2005; Przeniosło, 2002; 2004).

nia nauczycieli (np. Peressini, Borko, Romagnano, Knuth, Willis, 2004), jak i związaną z badaniami na temat pojęcia funkcji w procesie nauczania (np. Moschkovich, 2004).

Celem niniejszego artykułu jest zatem zarówno przedstawienie tej koncepcji, która określa nauczycielską wiedzę przedmiotową, jak i sformułowanie nasuwających się uwag i problemów oraz podjęcie próby jej modyfikacji.

Przedstawiam koncepcję R. Even na podstawie artykułu *Subject Matter Knowledge for Teaching and the Case of Functions* opublikowanego na łamach *Educational Studies in Mathematics* (Even, 1990)[5]. Do tej pory nie została ona opisana w języku polskim – a uważam, że warto ją poznać. Z wieloma ideami autorki zgadzam się, z pewnymi polemizuję, a jeszcze inne są dyskusyjne i mogą posłużyć Czytelnikowi zainteresowanemu dydaktyką szkoły wyższej jako materiał do refleksji.[6]

2. Krótka charakterystyka pracy R. Even

R. Even tworząc swoją koncepcję analizowała i integrowała trzy aspekty wiedzy przedmiotowej nauczycieli: rolę i znaczenie danej tematyki w matematyce teoretycznej i w programie nauczania matematyki; badania nad uczeniem się, znajomością i rozumieniem pojęć matematycznych (zarówno ogólnie, jak i w poszczególnych tematach) oraz badania nad wiedzą przedmiotową nauczycieli matematyki i rolą tej wiedzy w nauczaniu.

Rezultatem powyższych rozważań są wyróżnione i opisane przez nią elementy wiedzy na temat wybranego pojęcia matematycznego. Autorka zilustrowała swoją koncepcję charakteryzując nauczycielską wiedzę przedmiotową z zakresu funkcji oraz podając wybrane przykłady pochodzące z badań empirycznych.

3. Wyróżnione przez R. Even elementy nauczycielskiej wiedzy przedmiotowej z zakresu wybranego pojęcia

R. Even wyróżniła siedem elementów wiedzy związanej z wybranym pojęciem matematycznym:

1. Główne cechy pojęcia (*Essential Features*),
2. Różne reprezentacje pojęcia (*Different Representations*),
3. Różne sposoby podejścia do pojęcia (*Alternative Ways of Approaching*),
4. Siła pojęcia (*The Strength of the Concept*),
5. Podstawowy repertuar (*Basic Repertoire*),

[5] Rozszerzenie tej koncepcji o opis badań nad diagnozowaniem wiedzy przedmiotowej nauczycieli matematyki można znaleźć również w publikacji R. Even (1993).

[6] Składam serdeczne podziękowania prof. dr hab. Maciejowi Klakli za cenne wskazówki udzielone mi podczas pracy nad niniejszym artykułem.

6. Wiedza o pojęciu i jego rozumienie (*Knowledge and Understanding of a Concept*),
7. Wiedza o matematyce (*Knowledge about Mathematics).*

Poniżej przedstawiam jak autorka motywowała i opisała wyróżnione aspekty nauczycielskiej wiedzy przedmiotowej o danym pojęciu matematycznym.

3.1. Główne cechy pojęcia

Z opisu R. Even dowiadujemy się, że ten element nauczycielskiej wiedzy przedmiotowej dotyczy obrazu rozważanego pojęcia ukształtowanego u nauczyciela oraz stopnia dopasowania (*correspondence*, Resnick, Ford, 1984) tego obrazu do właściwego pojęcia matematycznego.

Następnie autorka stwierdziła:

> (...) z pewnością nauczyciele powinni być w stanie rozstrzygnąć, czy obiekt jest desygnatem pojęcia, czy nim nie jest, bazując na samym rozumowaniu analitycznym – a nie na osądzaniu w oparciu o model czy paradygmat. Pierwszy typ rozumowania jest oparty na samych warunkach definicyjnych pojęcia, (...) drugi natomiast polega na użyciu przykładu paradygmatycznego jako punktu odniesienia.
>
> (Even, 1990, s. 523)

Autorka rozróżniła dalej dwa sposoby użycia paradygmatu: albo nauczyciel bezpośrednio próbuje dopasować badany obiekt do paradygmatu (niejako nakładając obraz jednego na drugi), albo porównuje atrybuty własne paradygmatu z własnościami badanego obiektu.

Zdaniem autorki nie wystarczy to, że nauczyciele potrafią dokonać rozróżnienia pomiędzy obiektem, który jest desygnatem pojęcia, a tym, który nim nie jest – jeśli dopasowują go tylko do swojego obrazu pojęcia. Według niej nauczyciele powinni znać współczesne definicje pojęć matematycznych.

Należałoby tu dokonać pewnych uzupełnień i podkreślić, że nauczyciele powinni nie tylko znać wybraną definicję pojęcia, ale również inne równoważne sformułowania definicji (np. różne równoważne definicje poszczególnych czworokątów). W przeciwnym razie nauczyciele nie potrafiliby zweryfikować bardzo ważnej aktywności ucznia – definiowania, co więcej, akceptowaliby jako definicję poprawną tylko tę, którą sami znają, co w dalszej perspektywie mogłoby zrodzić u ucznia poczucie konieczności uczenia się matematyki na pamięć.

R. Even ponadto uważa, że nie wystarczy, jeśli nauczyciel prawidłowo rozróżnia desygnaty pojęcia od obiektów, które nimi nie są, jeśli nie opiera swojego osądu na definicji. Można zadać sobie w tym kontekście kilka pytań. Czy potrafimy dowiedzieć się, na jakiej podstawie nauczyciel wydaje swój osąd? Czy należy dyskryminować dobry werdykt oparty, w pierwszym odruchu, na samym obrazie pojęcia w sytuacji, gdy obiekt do niego pasuje? Nie należy zupełnie negować korzystania z własnego obrazu pojęcia, pod warunkiem, że jest to umiejętne korzystanie. Trzeba tu podkreślić z mocą, że osoba, która wydała osąd na podstawie samego obrazu pojęcia, musi w każdej chwili umieć go zweryfikować w oparciu o samą definicję. Taki powrót musi być zawsze możliwy. Można zatem ten postulat trochę inaczej sformułować – nie koncentrując uwagi na samym rozstrzygnięciu, lecz na jego uzasadnieniu: nauczyciel powinien zawsze umieć uzasadnić, w oparciu o definicję, czy dany obiekt jest desygnatem pojęcia, czy nim nie jest, przynajmniej w zakresie obiektów pojawiających się w nauczaniu na danym poziomie.

Umiejętność takiego rozstrzygania w oparciu o definicję jest niewątpliwie jedną z najbardziej elementarnych aktywności matematycznych. Z pewnością nauczyciel musi ją posiadać. Zauważmy jeszcze, że rozważania na ten temat można umieścić w punkcie *Wiedza o matematyce* (paragraf 3.7). Matematyka nie zna bowiem innego sposobu rozstrzygania, czy obiekt jest desygnatem pojęcia, czy nie – jak tylko w oparciu o definicję.

R. Even nazwała ten aspekt *głównymi cechami pojęcia*. Wydaje się, że takie jego sformułowanie może budzić wątpliwości. Co to znaczy *główne cechy*? Niestety, autorka nie odpowiada na to pytanie. Trudno byłoby odpowiedzieć na pytanie, jakie są główne cechy na przykład pojęcia liczby rzeczywistej? W punkcie 4.1 przedstawiam główne cechy pojęcia funkcji wyszczególnione przez autorkę.

3.2. Różne reprezentacje

W opisie tego aspektu autorka najpierw zwróciła uwagę na to, że często operujemy pojęciami matematycznymi używając różnych nazw, notacji i reprezentacji. W zależności od kontekstu teoretycznego może zostać włączona i rozwinięta inna reprezentacja danego pojęcia.

R. Even podkreśliła dalej:

> (...) rozumienie pojęcia w jednej reprezentacji niekoniecznie oznacza, że będzie ono rozumiane w innej. Nauczyciele nie tylko powinni rozumieć pojęcie w jego różnych reprezentacjach, ale też powinni umieć budować i formować powiązania między tymi reprezentacjami.
>
> (Even, 1990, s. 524)

Autorka poruszyła problematykę znajomości reprezentacji niejako w dwóch aspektach. Najpierw podkreśliła, że nauczyciele powinni opanować zarówno umiejętność przejścia z jednej reprezentacji do drugiej, jak i znajomość powiązań między nimi, gdyż w poszczególnych reprezentacjach różne własności pojęcia lub jego cechy (inne niż definicyjne) łatwiej można dostrzec lub badać. Następnie stwierdziła, że operowanie przykładami pojęcia w różnych reprezentacjach przyczynia się do wyabstrahowania samego pojęcia. A zatem rozważała proces kształtowania tego pojęcia.

R. Even stwierdza, że można pojęcie matematyczne rozumieć w jednej reprezentacji, a w drugiej nie. Teza ta budzi wątpliwości – co to znaczy „rozumieć pojęcie w reprezentacji"? Czy chodzi tu o rozumienie samego pojęcia, czy też o rozumienie reprezentacji pojęcia? Czy jest taka możliwość, aby abstrakcyjne pojęcie było rozumiane ogólnie, a niezrozumiane w jakiejś reprezentacji? To karkołomna hipoteza. Można w takim kontekście jedynie mówić o niezrozumieniu samej reprezentacji, a nie pojęcia w tej reprezentacji. Reprezentacja pojęcia, z punktu widzenia filozofii matematyki, jest pojęciem wtórnym względem samego pojęcia abstrakcyjnego. Istnienie różnych reprezentacji pojęć matematycznych zostało bowiem wymuszone przez abstrakcyjny charakter tych pojęć – nie można ich bowiem ani narysować, ani pokazać (Klakla, 2003b). Dodajmy jeszcze, że:

> (...) w matematyce przedmiotem badań są pojęcia abstrakcyjne same w sobie. (...) Wszystkie wnioskowania i rozumowania dotyczą samych abstrakcyjnych pojęć, a nie ich reprezentacji. Reprezentacje tych pojęć pochodzą niejako z innego świata, są podpórką, oparciem dla myśli, oddziałują one na wyobrażenia, ale nie mogą zostać utożsamione z samymi pojęciami.
>
> (Klakla, 2003b, s. 29)

Utożsamianie pojęcia z jego reprezentacją może stanowić poważną przeszkodę w rozumieniu danego pojęcia. Niewątpliwie nauczyciele powinni nie tylko pokonać tę przeszkodę, ale też mieć jej pełną świadomość i uwrażliwić się na nią.

3.3. Różne sposoby podejścia do pojęcia

Ten aspekt wiedzy nauczycielskiej nie został przez R. Even ściśle sformułowany. W jej opisie dowiadujemy się jedynie, że:

> Złożone pojęcia nie tylko przyjmują różne nazwy, formy i reprezentacje i notacje, ale też są używane w różny sposób (...). Te różne sposoby podejścia i użycia pojęcia nie pasują do wszystkich sytuacji. (...) Nauczyciele powinni o tym wiedzieć i umieć je stosować.
>
> (Even, 1990, s. 525)

Autorka formułuje swoją koncepcję ogólnie – dla wybranego pojęcia matematycznego. Czy potrafilibyśmy odpowiedzieć na pytanie: jakie mogą być różne sposoby podejścia na przykład do pojęcia figury wypukłej? Prawdopodobnie R. Even chciała zwrócić uwagę na różne sposoby badania własności wybranego desygnatu danego pojęcia, zadanego w jednej reprezentacji. W paragrafie 4.3 powrócę do tego problemu i przedstawię jak autorka opisała ten element wiedzy przedmiotowej dla pojęcia funkcji.

3.4. Siła pojęcia

Ten aspekt nauczycielskiej wiedzy z zakresu danego pojęcia jest opisany przez R. Even równie ogólnie jak poprzedni. Dowiadujemy się jedynie, że:

> (...) sukces danego pojęcia w matematyce jest zakorzeniony w nowych możliwościach, jakie ono otwiera. Nauczyciele powinni zatem dobrze rozumieć te wyjątkowe i pełne mocy cechy pojęcia, które otwierają nowe możliwości.
>
> (Even, 1990, s. 525)

Na czym więc polega *siła pojęcia* matematycznego? Czy jest to termin obiektywny? Wydaje się, że matematyk-teoretyk inaczej będzie postrzegał siłę danego pojęcia niż fizyk stosujący dane pojęcie, jeszcze inaczej spostrzeże ją nauczyciel. Oczywiście możemy od razu doprecyzować: w tych rozważaniach interesuje nas siła pojęcia z punktu widzenia istotnego dla nauczania. A zatem nasuwa się kolejne pytanie – jak daleko powinna sięgać wiedza nauczyciela o sile pojęcia w matematyce abstrakcyjnej? Powrócę do tego pytania w kontekście rozważania siły pojęcia funkcji (paragraf 4.4).

3.5. Podstawowy repertuar

Autorka podkreśliła, że nauczyciel powinien bardzo dobrze znać pewne szczególne przykłady pojęcia, a zestaw takich niezbędnych desygnatów nazwała *podstawowym repertuarem*. Even stwierdziła, że trzeba zaliczyć do nich wszystkie przykłady ilustrujące pewne ważne reguły, własności czy twierdzenia dotyczące danego pojęcia.

Warto tu jeszcze dodać, iż praca nad doskonaleniem podstawowego repertuaru nie powinna nigdy zostać zakończona. Proces włączania nowych desygnatów do podstawowego repertuaru wraz z ich wnikliwym badaniem powoduje bowiem poszerzenie obrazu danego pojęcia, a więc polepsza się owo *dopasowanie* obrazu pojęcia do właściwego matematycznego pojęcia postulowane powyżej w opisie pierwszego elementu wiedzy – *głównych cech pojęcia* (paragraf 3.1).

Można byłoby sformułować pytanie: czy podstawowy repertuar przykładów dla nauczyciela ma się pokrywać z desygnatami pojęć proponowanymi w programach nauczania jako podstawowe dla ucznia? Oczywiście nie. Nauczyciel powinien mieć zdecydowanie szerszy repertuar podstawowych desygnatów pojęcia. I znów pojawia się problem – czy możemy określić, jak bardzo musi on być szeroki?

3.6. Wiedza o pojęciu i jego rozumienie

R. Even opisała tu najpierw dwa różne rodzaje wiedzy o pojęciu w oparciu o pracę J. Hieberta i P. Lefevere'a (1986). Pierwsza z nich to *wiedza pojęciowa* (*conceptual knowledge*), bogata w zależności, opisana przez przywołanych autorów jako sieć pojęć i zależności. Uczenie się nowych pojęć lub zależności polega na dodaniu do istniejących struktur poznawczych nowego połączenia.

Drugi rodzaj to *wiedza proceduralna* (*procedural knowledge*), która jest tworzona z formalnego języka matematyki i algorytmów.

R. Even, powołując się na różne wyniki badań, stwierdza, że w uczeniu matematyki szkolnej kładzie się nadmierny nacisk na wiedzę proceduralną, bez powiązania jej z wiedzą pojęciową.

Możemy od razu dopowiedzieć, że tak prowadzone nauczanie – skrajnie eksponujące schematy o charakterze algorytmicznym – może prowadzić do zahamowania rozwoju matematycznego myślenia ucznia, pojawienia się formalizmu zdegenerowanego (Krygowska, 1977), a w konsekwencji nawet do całkowitego zniechęcenia ucznia do matematyki.

Autorka podsumowując swoje rozważania stwierdza, że wiedza o pojęciu matematycznym powinna zawierać zarówno wiedzę pojęciową jak i proceduralną wraz ze związkami między nimi.

Jak należy zatem rozumieć aspekt: *wiedza o pojęciu i jego rozumienie*? Odpowiedź na to pytanie nie jest łatwa. Z zamieszczonego powyżej opisu wynika jedynie wniosek, że nauczyciel dysponować powinien powiązanymi ze sobą i w pełni wykształconymi dwoma rodzajami wiedzy: pojęciową i proceduralną.

Kwestia samego rozumienia pojęcia pojawiła się już fragmentarycznie w punkcie 3.1. Problematyka ta jednak jest niezwykle szeroka i podejmowana przez wielu badaczy – począwszy od prób zdefiniowania, co to znaczy rozumieć pojęcie matematyczne, poprzez próby określania poziomów rozumienia pojęcia lub też wyróżnianie różnych aspektów lub kategorii czynności rozumienia.

Poruszona w tym punkcie problematyka jest zatem zbyt ogólna i bogata, by mogła stanowić wybrany element nauczycielskiej wiedzy przedmiotowej. Ponadto zawiera inne spośród wyróżnionych elementów (np. *główne cechy pojęcia, różne reprezentacje, różne sposoby podejścia do pojęcia*).

3.7. Wiedza o matematyce

W opisie tego aspektu czytamy:

> Wiedza o wybranych zagadnieniach matematyki zawiera nie tylko wiedzę proceduralną i pojęciową. Zawiera również wiedzę o naturze matematyki. Jest to ogólniejsza wiedza o dyscyplinie, która kieruje tworzeniem i używaniem wiedzy proceduralnej i pojęciowej. Zawiera ona sposoby, środki i procesy, dzięki którym tworzone są nowe pojęcia i twierdzenia. Pozwala też wciąż na nowo ustanawiać hierarchię poszczególnych pojęć. (...) Natura matematyki zawiera również nieustannie zmieniający się charakter matematyki, oraz uznaje, że nauka ta jest wolnym wynalazkiem intelektu ludzkiego, który ulega wpływom różnych sił matematycznych i spoza matematyki (...).
>
> (Even, 1990, s. 527)

Ten aspekt wiedzy przedmiotowej nauczycieli zawiera między innymi wybrane elementy metody matematycznej. Wśród innych nie wymienionych przez autorkę elementów metody matematycznej jest na przykład formalna logika matematyczna i teoria mnogości – jako metamatematyka i metajęzyk, powstawanie systemów dedukcyjnych, rozumienie różnych motywacji i schematów konstruowania poprawnej definicji matematycznej, rozumienie związków między pojęciami pierwotnymi a definiowanymi i inne.

Sądzę, że nazwa tego aspektu jest zupełnie chybiona. *Wiedza o matematyce* to zbyt bogaty i pełen treści termin, aby mógł stanowić wybrany element nauczycielskiej wiedzy przedmiotowej.

4. Opis koncepcji R. Even dla funkcji

R. Even opisała elementy nauczycielskiej wiedzy przedmiotowej z zakresu funkcji. Przeprowadziła również badania nad diagnozowaniem wiedzy przedmiotowej przyszłych nauczycieli matematyki szkoły średniej w ostatnim stadium ich przygotowania do zawodu w ośmiu środkowozachodnich uniwersytetach w Stanach Zjednoczonych. Nie wiadomo jednak, jaka była ogranizacja i przebieg badań. Autorka stwierdziła jedynie, że badani uzupełniali kwestionariusz z otwartymi pytaniami, które były niestandardowymi zadaniami badającymi siedem powiązanych ze sobą aspektów wiedzy o funkcjach.

Niestety, autorka nie przedstawiła w swoim artykule treści wszystkich zadań i pytań zawartych w kwestionariuszu. W związku z powyższym pominę rozważania na temat doboru właściwych narzędzi do badania wyszczególnionych aspektów wiedzy o funkcji[7].

4.1. Niezbędne cechy – co to jest funkcja?

W opisie tego aspektu wiedzy na temat funkcji autorka przywołuje opracowanie H. Freudenthala (1983), który analizując rozwój historyczny pojęcia funkcji wyróżnił dwie główne jego cechy: *arbitralność* (*arbitrariness*) i *jednowartościowość* (*univalence*). W polskiej terminologii dydaktyki matematyki o *arbitralności* funkcji mówimy jako o funkcji w *ogólnym sensie* (Krygowska, 1977), a zamiast słowa *jednowartościowość* używamy raczej określenia *jednoznaczność*.

4.1.1. Arbitralność funkcji

R. Even stwierdza, że arbitralna natura funkcji odnosi się zarówno do związku pomiędzy dwoma zbiorami, na których jest ona zadana, jak i do samych

[7] Sądzę, że warto jednak podjąć tę tematykę w odrębnym opracowaniu, polemizując z wybranymi zadaniami zaproponowanymi przez autorkę i przedstawiając propozycję innych zadań – narzędzi diagnostycznych do badania wiedzy przedmiotowej nauczycieli dotyczącej funkcji. Uważam, że rolę narzędzi diagnozujących wybrane aspekty rozumienia tego pojęcia mogą pełnić zadania związane z równaniami funkcyjnymi (Sajka, 2003; 2005a).

zbiorów. Następnie wyjaśnia te dwa rodzaje arbitralności. Pierwszy polega na tym, że funkcje nie muszą być opisane przez żadne specjalne wyrażenie, nie muszą wykazywać żadnej regularności ani nie muszą być opisane przez wykresy o jakimś szczególnym kształcie – autorka podaje tu przykład funkcji opisujących zależność pomiędzy czasem a temperaturą powietrza w danym miejscu. Drugi natomiast, dotyczący arbitralnej natury zbiorów, oznacza, że funkcje nie muszą być zdefiniowane na specjalnych zbiorach obiektów, w szczególności nie muszą to być zbiory liczbowe. Autorka podaje tu przykład obrotu płaszczyzny jako funkcji zadanej na zbiorze punktów.

R. Even przypomina dalej, że osiemnastowieczni matematycy długo zmagali się z arbitralnością koncepcji tego pojęcia i zaczęli ją rozważać dopiero w XIX w., kiedy Dirichlet wprowadził swoją funkcję. Następnie oprócz arbitralności relacji pomiędzy zmiennymi zaakceptowano również dowolność samych zbiorów zmiennych.

Autorka podkreśla, że przyszli nauczyciele powinni zatem akceptować arbitralność funkcji. Badania, o których wspomniała, wykazują jednak, że przeszkodą w akceptowaniu arbitralności funkcji mogą być ograniczone obrazy tego pojęcia. R. Even twierdzi, że niepełny obraz pojęcia u nauczycieli jest poważnym problemem, bo może się przyczynić do cyklu niezgodności pomiędzy definicją pojęcia a jego obrazem u uczniów.

4.1.2. Jednowartościowość funkcji

W opisie tej cechy funkcji autorka zauważa, że arbitralność funkcji wynika z definicji funkcji, natomiast jednowartościowość jest wymaganiem sformułowanym oddzielnie i wyraziście, jest uwypuklona w prawie każdym tekście definicyjnym.

> Nie jest jednak wystarczająca sama wiedza o tym, że funkcje muszą być jednowartościowe. Nauczyciele szkół średnich powinni wiedzieć, **dlaczego** funkcje są zdefiniowane w ten sposób. Powinni znać rozwój historyczny tego pojęcia, ponieważ wyjaśnia, dlaczego funkcje są dzisiaj tak właśnie zdefiniowane (...).
>
> (Even, 1990, s. 530)

Autorka porusza tu kwestię motywacji wprowadzania definicji. Wyjaśniając, dlaczego na funkcję narzucony jest warunek jednoznaczności, powołuje się na H. Freudentala (1983), który motywował ten fakt dążeniem matematyków do tego, by pojęcia stały się możliwe do opanowania w celu posługiwania się nimi. Rzeczywiście w matematyce pragnienie jednoznaczności jest tak silne, że wprawdzie istnieje pojęcie *funkcji wielowartościowych*, na przykład $f(x) = \{x, x+1\}$, ale *de facto* są to funkcje $f\colon R \longrightarrow 2^R$. Skoro ich wartości są ze zbioru potęgowego, to postulat jednowartościowości jest zachowany. Matematycy też wolą nazywać takie funkcje jako *set-valued functions*.

Czy to pragnienie jednoznaczności jednak do końca wyjaśnia poruszoną kwestię? To dążenie nie jest przecież rozstrzygającym kryterium formułowania definicji. Możemy to zobaczyć na przykładzie definicji pierwiastka kwadratowego używanych w różnych krajach. W polskiej definicji arytmetycznego pierwiastka stopnia drugiego – zakładamy nie tylko konieczną nieujemność liczby podpierwiastkowej, ale dodatkowo również nieujemność wyniku pierwiastkowania. Nie we wszystkich krajach jest formułowany warunek jednoznaczności w definicji pierwiastka. Czytając tekst R. Even można było się o tym przekonać – dla niej pierwiastek stopnia drugiego jest symbolem dwuwartościowym[8]. Podobnie w matematyce teoretycznej wprowadzamy terminy wielowartościowe (np. zespolone funkcje pierwiastkowe). Oczywiście zawsze wybór odpowiedniego warunku w formułowaniu definicji ma jakąś motywację.

Motywacje wprowadzania definicji mogą być względne i o tym nauczyciele też powinni wiedzieć. Ponadto mogą mieć różne podłoża – na przykład estetyczne, strukturalne, dydaktyczne, uwarunkowane zarówno historycznym rozwojem pojęcia, jak i wynikające z aktualnych badań matematyki abstrakcyjnej. Te rozważania na temat definicji w oczywisty sposób poruszają kwestię metodologii matematyki – opisywaną również w punkcie 4.7.

W przypadku procesu formułowania definicji funkcji te motywacje były również bardziej złożone, a ich wnikliwe zbadanie wymaga odrębnych analiz. Wydaje się zatem przesadą, byśmy oczekiwali od nauczycieli dogłębnej wiedzy na ten temat. Istotne jest natomiast, aby nauczyciele znali ogólny zarys historii kształtowania się pojęcia funkcji. Ta wiedza powinna być przez nich wykorzystana podczas przygotowywania procesu kształtowania tego pojęcia u uczniów.

Z badań R. Even wynika, że prawie żaden z przyszłych nauczycieli nie potrafił wyjaśnić, dlaczego warunek jednowartościowości jest tak ważny i dlaczego funkcje zostały zdefiniowane w ten sposób. Co więcej, R. Even relacjonuje, że wielu praktykujących nauczycieli nie wyjaśniło, jaka jest różnica między funkcjami a relacjami i w czym funkcje mają przewagę nad relacjami. To podejście, według autorki, może przyczynić się do tworzenia obrazu matematyki jako zbioru odgórnie narzuconych reguł i definicji.

W dalszych rozważaniach R. Even czytamy:

> Arbitralność i jednowartościowość są istotą współczesnego pojęcia funkcji. Twierdzimy, że obrazy pojęcia funkcji wytworzone u nauczycieli powinny być dobrze dopasowane do **współczesnego pojęcia matematycznego**. Jednak to niekoniecznie oznacza, że mają oni znać **współczesną formalną definicję funkcji**, gdzie funkcja f jest zdefiniowana jako dowolny zbiór uporządkowanych par takich elementów, że jeśli $(a, b) \in f$, $(c, d) \in f$ i $a = c$, to $b = d$. Innymi słowy nauczyciele niekoniecznie muszą myśleć o funkcji jako o szczególnym podzbiorze iloczynu kartezjańskiego dwóch zbiorów, w którym dowolny element dziedziny (zbioru wszystkich pierwszych elementów par uporządkowanych) tworzy parę z jednym

[8]Również w wielu innych państwach pierwiastek kwadratowy jest dwuwartościowy.

> i tylko jednym elementem ze zbioru wartości (zbioru wszystkich drugich elementów par uporządkowanych). Pomimo, iż typowo mnogościowa definicja funkcji jest oczywiście poprawna, to nie wyraża ona takiego znaczenia, w jakim funkcja jest często używana w matematyce, innych naukach czy w życiu codziennym (...). W wielu przypadkach funkcja ma formę odpowiedniości, przypisania, zależności pomiędzy dwoma zbiorami lub zmiennymi.
>
> (Even, 1990, s. 531-532)

Chciałabym wyraźnie sprzeciwić się powyższej tezie, co więcej, wydaje się ona wręcz niezgodna z „duchem" omawianego artykułu. R. Even pisze, że nauczycielskie obrazy pojęcia funkcji powinny być dobrze dopasowane do nowoczesnego matematycznego pojęcia. Czy możliwe jest zatem takie dobre dopasowanie, jeśli nauczyciel nie zna i nie potrafi myśleć o pojęciu w kategorii formalnej definicji? Uważam, że nauczyciel powinien nie tylko znać pełną definicję formalną (nie tylko w półformalnym brzmieniu przytoczonym przez autorkę), ale również powinien umieć elastycznie „przełączać" sposób myślenia o funkcji z dynamicznego (funkcja jako proces) na statyczny (funkcja jako obiekt), w tym również traktując funkcję jako szczególną relację. Przypomnijmy – A. Sfard (1991) podkreśla, że te dwa podejścia, na pozór niekompatybilne, powinny wzajemnie uzupełniać się tworząc całość – jak dwie strony tej samej monety. Co więcej, A. Sfard twierdzi, że koncepcja operacyjna pojęcia jest dla większości ludzi pierwszym krokiem w nabywaniu i formowaniu pojęć matematycznych jako obiektów.

A. Z. Krygowska podsumowując krótki rys historyczny pojęcia funkcji, stwierdza ponadto:

> Nowoczesne pojęcie funkcji będące rezultatem długiego łańcucha kolejnych uogólnień okazało się więc w istocie rzeczy jedną z najprostszych struktur definiowanych dziś za pomocą skromnych środków w teorii mnogości, a więc w fundamentach matematyki.
>
> (Krygowska, 1977, s. 33)

Moim zdaniem warunkiem koniecznym, aby nauczyciel mógł wypracować sobie jak najlepszy obraz pojęcia funkcji, jest umiejętność spojrzenia na funkcję wszechstronnie, również z punktu widzenia szerszej struktury – traktując funkcję jako punkt innej przestrzeni. Do tego potrzebna jest znajomość formalnej definicji i umiejętność myślenia o funkcji jako o pewnym podzbiorze. Oczywiście to rozumienie nie może eliminować spojrzenia operacyjnego, które jest właściwe dla nauczania szkolnego.

Dodajmy na koniec tych rozważań jeszcze jedno spostrzeżenie:

> Przykład rozwoju pojęcia funkcji ilustruje pewną ogólniejszą prawidłowość, którą dostrzegamy w historii matematyki.

> Matematyka rośnie nie tylko w górę i wszerz, ale zstępuje coraz głębiej do własnych fundamentów, odkrywając je w bardzo prostych ogólnych schematach abstrakcyjnych.
>
> (Krygowska, 1977, s. 33)

Nauczyciel musi zatem znać te proste, ogólne schematy abstrakcyjne.

4.2. Różne reprezentacje funkcji

R. Even podkreśliła, że funkcje są obecne niemal w całej współczesnej matematyce i pojawiają się w różny sposób, mają różne nazwy, notacje i reprezentacje. Rozważała jednak głównie funkcje liczbo-liczbowe, określone na zbiorze liczb rzeczywistych, pisząc na przykład, że najbardziej powszechną reprezentacją jest wzór funkcji oraz wykres w układzie współrzędnych. Wydaje się, że dla funkcji określonych na zbiorze skończonym o małej liczbie elementów inna będzie „najbardziej powszechna reprezentacja".

Streszczając opis tego aspektu wiedzy o funkcjach – zaproponowany przez autorkę – możemy stwierdzić, że nauczyciele powinni elastycznie poruszać się w „świecie" różnych rodzajów funkcji i ich reprezentacji oraz powinni umieć dokonywać właściwych wyborów w zależności od kontekstu i potrzeby.

Wydaje mi się, że należy jeszcze dodać do powyższych postulatów kwestię **rozumienia reprezentacji**. Czasami reprezentacja może być pojęciem bardzo trudnym i złożonym. Dla przykładu rozumienie wykresu funkcji wymaga rozumienia wielu innych pojęć: układu współrzędnych, czyli też osi liczbowej – a zatem również funkcji będącej bijekcją, współrzędnych punktu – a zatem pary uporządkowanej lub ciągu dwuwyrazowego (Semadeni, 2002b), czyli też funkcji, a skoro mamy współrzędne punktu – to pojawia się problem rozumienia liczby rzeczywistej. Zatem można byłoby długo wymieniać pojęcia istotne dla rozumienia tej jednej reprezentacji.

Słusznym wydaje się więc dodanie do rozważań R. Even stwierdzenia: nauczyciele powinni mieć świadomość złożoności reprezentacji pojęcia funkcji, powinni rozumieć pojęcia z nimi związane oraz dobrze znać i umieć stosować umowy i konwencje związane z tymi reprezentacjami.

4.3. Różne sposoby podejścia do pojęcia funkcji

R. Even rozróżniła trzy rodzaje podejścia do badania funkcji. Pierwszym z nich jest ukierunkowanie na punkty, które wykorzystujemy, gdy interesują nas na przykład wybrane punkty wykresu lub wartości funkcji dla poszczególnych argumentów. Drugim jest ukierunkowanie na przedziały, gdy na przykład poszukujemy ekstremum lokalnego danej funkcji. Trzecim jest ukierunkowanie na ogólne własności, wykorzystywane na przykład wtedy, gdy analizujemy jej przebieg. Autorka podkreśliła, że w niektórych sytuacjach można wykorzystać więcej niż jeden sposób podejścia, ale wówczas któryś z nich może się okazać bardziej efektywny.

Autorka podkreśliła następnie, że wszyscy przyszli nauczyciele biorący udział w jej badaniach uczyli się rachunku różniczkowego i całkowego oraz innych zaawansowanych przedmiotów matematycznych. Wszyscy zatem powinni byli wiedzieć, że na przykład przy rysowaniu wykresów niezwykle istotna jest analiza pewnych charakterystycznych własności funkcji. Z jej relacji wynika jednak, że zdecydowana większość badanych próbowała rysować wykres zadanej funkcji wymiernej w sposób wyraźnie ukierunkowany na punkty. Trudno byłoby nie zgodzić się z oczywistym wnioskiem z analizy wspomnianego fragmentu badań stwierdzającym, że skoro przyszli nauczyciele mają pomagać uczniom w kształtowaniu umiejętności badania funkcji, to najpierw oni sami powinni to doskonale opanować.

W tym momencie znów można zarzucić autorce, że prowadziła rozważania dotyczące jedynie funkcji liczbo-liczbowych. Wydaje się jednak, że można podobne sposoby podejścia do badania pojęcia przenieść na inne rodzaje funkcji – na przykład na przekształcenia płaszczyzny.

Można na koniec jeszcze podkreślić, że nazwa tego aspektu wiedzy przedmiotowej nie jest adekwatna do jego opisu. Autorka nie rozważała bowiem sposobów podejścia do ogólnego pojęcia funkcji, lecz badała różnymi sposobami jego wybrany desygnat w wyraźnie określonej reprezentacji.

4.4. Siła pojęcia – funkcja odwrotna i złożenie funkcji

W opisie tego aspektu R. Even powołując się na H. Freudenthala (1983) stwierdziła, że siła pojęcia funkcji jest zakorzeniona w dwóch operacjach – składaniu i odwracaniu funkcji, gdyż one kreują bogactwo nowych obiektów i możliwości.

Autorka podkreśla, że umiejętności podstawiania jednych funkcji do innych i odwracania ich stworzyły nowe funkcje i pomogły w badaniu pochodnych i całek a także przyczyniły się do dynamicznego rozwoju analizy. Rozumienie pojęcia funkcji musi zatem zawierać rozumienie składania funkcji i ich odwracania.

Na podstawie przeprowadzonych badań R. Even opisała następnie trudności przyszłych nauczycieli związane z rozumieniem pojęcia funkcji odwrotnej. Autorka podsumowała swój opis stwierdzeniem, że prawdziwe rozumienie funkcji odwrotnej przez nauczycieli nie może poprzestawać na intuicyjnym poszukiwaniu operacji odwrotnej, tylko musi być oparte na formalnej wiedzy.

Podsumowując rozważania R. Even na temat siły pojęcia funkcji, można stwierdzić, że traktowała ona funkcję jako element pewnej struktury. Jest to odmienne spojrzenie od dotychczasowego, w którym funkcja jawiła się jako obiekt do badania.

Pisząc o sile pojęcia autorka zakorzeniła ją w operacjach składania i odwracania funkcji. Można zadać pytanie – czy tylko te dwie operacje stanowią siłę funkcji? Uważam, że nie. Na siłę tego pojęcia możemy spojrzeć ogólniej. Funkcja jest pojęciem, które pozwala na zamianę pewnych problemów dotyczących różnych pojęć i obiektów (w tym również problemów dotyczących innych nauk) na problemy dotyczące na przykład liczb. A zatem pozwala ona na transportowanie problemów jednej struktury do innej.

R. Skemp pisząc o funkcjach formułuje to wyraziście:

> Można wyróżnić dwie klasy użycia funkcji. W pierwszej jesteśmy głównie zainteresowani tym, który element danego zbioru jest przypisany któremu (na przykład o której godzinie pociąg jest na stacji Euston). W drugiej umożliwia się nam ominięcie problemu poprzez przetransportowanie (*mapping*)[9] go na odwzorowany zbiór [zbiór wartości funkcji] i rozwiązanie prostszego problemu zamiast danego.
>
> (Skemp, 1971, s. 256)

Uważam, że nauczyciel powinien mieć świadomość również tak opisanej siły pojęcia funkcji.

Postrzeganie siły tego pojęcia zależy od rodzaju i zakresu wiedzy, którą dysponujemy. Z pewnością jednak, jeśli nauczyciel chce zobaczyć siłę tego pojęcia, musi spojrzeć na funkcję ogólniej. Rodzi się więc kolejne pytanie: jak daleko powinna sięgać wiedza nauczyciela o sile pojęcia?

4.5. Podstawowy repertuar – funkcje w programie szkoły średniej

R. Even rozpoczęła opis tego aspektu od pytania, jakie przykłady paradygmatyczne powinien zawierać podstawowy dla nauczyciela szkoły średniej repertuar przykładów (zob. paragraf 3.5), a następnie podała przykład, który uwydatnia, jak ważna jest dogłębna znajomość takich przykładów.

W tym aspekcie wiedzy o funkcjach R. Even koncentruje uwagę na zestawie paradygmatów pojawiających się w nauczaniu w szkole średniej. Podkreśla, iż nauczyciele powinni głęboko i szczegółowo je znać i rozumieć. Nie twierdzi, że są one podstawowe dla samego nauczyciela – natomiast kwestii określenia podstawowego repertuaru przykładów funkcji dla nauczyciela w ogóle nie porusza.

4.6. Wiedza i rozumienie pojęcia funkcji

W opisie tego aspektu autorka omawianej koncepcji przedstawiła dwa przykłady, które miały ilustrować ważność obu rodzajów wiedzy: proceduralnej i pojęciowej, oraz związków między nimi.

[9] Dodajmy tu na marginesie, że w języku angielskim często używa się terminu *mapping* jako synonimu funkcji.

Następnie w konkluzji stwierdziła, że nauczyciel może mieć ogromne trudności z rozumieniem pojęć, gdy jego wiedza nie jest spójnym połączeniem wiedzy proceduralnej z pojęciową.

4.7. Wiedza o matematyce

R. Even zwróciła najpierw uwagę na to, że wiedza o naturze matematyki wpływa na faktyczną wiedzę o funkcji, a nieprawidłowe zastosowanie matematycznych narzędzi może prowadzić do niewłaściwej wiedzy o funkcjach.

Następnie podkreślała wagę umiejętności rozumowania indukcyjnego i dedukcyjnego, wnioskowania, uogólniania, weryfikowania, szukania kontrprzykładów, formułowania hipotez i innych.

Z pewnością można się zgodzić z autorką, że nauczyciele powinni wykazać się takimi umiejętnościami. Jednak nie można się zgodzić z tezą, że opisane tu umiejętności stanowią *wiedzę o matematyce*. Są to bowiem podstawowe *aktywności matematyczne* – czyli cele z II poziomu nauczania matematyki wg A. Z. Krygowskiej (1986).

Wskazane jest również, aby nauczyciel osiągnął cele nauczania z III poziomu, czyli opanował podstawowe *postawy i zachowania intelektualne* możliwe do kształtowania poprzez matematykę, a przenoszone przez transfer na sytuacje życiowe funkcjonujące poza matematyką (np. *dyscyplina i krytycyzm myślenia* (Klakla, 2003a)).

Ponadto nauczyciel powinien osiągnąć umiejętność *samoobserwacji aktywności myślowej*, którą zdefiniował i opisał J. Konior (1993).

Ten element wiedzy przedmiotowej powinien zawierać też inny aspekt. Dla rozumienia pojęcia funkcji potrzebna jest bowiem znajomość i rozumienie elementów logiki i teorii mnogości – wśród pojęć związanych z funkcją wymienić można na przykład takie, jak zbiór, relacja należenia, iloczyn kartezjański zbiorów, para uporządkowana, kwantyfikatory, koniunkcja, implikacja i inne.

Wszystkie wspomniane tu postulaty zaliczam do **kultury matematycznej**.

5. Modyfikacja koncepcji

Uważam, że w przypadku pojęcia funkcji (a przypuszczam, że również dla niektórych innych pojęć) należałoby uzupełnić tę koncepcję przynajmniej o jeden – moim zdaniem bardzo ważny aspekt: **rozumienie języków związanych z pojęciem i właściwe nimi operowanie**.

Język używany w kontekście pojęcia funkcji jest niezwykle różnorodny. Dotyczy on zarówno rozmaitych reprezentacji, działów matematyki, różnych typów funkcji oraz różnych poziomów matematycznej abstrakcji.

To bogactwo języka funkcyjnego zarówno przynosi korzyści, jak i rodzi niebezpieczeństwa. Na przykład język, którym operuje się w kontekście przekształceń geometrycznych, przenika do terminologii funkcji liczbo-liczbowych tworząc czasami obrazowe przedstawienie danego aspektu pojęcia funkcji (np. „Co jest obrazem zbioru A przez funkcję f?") lub tworząc niejako skrót myślowy, który może zrodzić nieporozumienia (np. „weźmy punkt $x = 5$") lub wręcz prowokować błędy poprzez niewłaściwe skojarzenia (np. „miejsce zerowe", „granica i ciągłość funkcji w punkcie").

Gdy połączymy językowo różne światy funkcji, to czasami otrzymamy twór sensowny (np. „Czy funkcja kwadratowa ma punkty stałe?"), a czasami nonsensowny (np. „Czy izometria jest funkcją rosnącą?").

Niekiedy świat pewnych funkcji jest tak hermetyczny językowo, że potrzeba dużego wysiłku, aby zobaczyć analogie. Trudno jest uczniowi zobaczyć w zapisie $(1, 2, 3, 4)$ funkcję i narysować jej wykres, trudno też dwunasty wyraz ciągu uznać za $f(12)$, jeszcze trudniej zobaczyć funkcję w zapisie macierzy. Ten brak powiązania rodzi błędy językowe świadczące o niezrozumieniu pojęć (np. wtedy, gdy przyszły nauczyciel czytając zapis a_n mówi: „a-enty wyraz ciągu".)

Niewątpliwie nauczyciel musi rozumieć język dotyczący funkcji i umieć się nim poprawnie posługiwać. Powinien być również uwrażliwiony na różne pułapki językowe i powinien potrafić wskazać analogie i różnice w używaniu tego języka w różnych kontekstach.

Warto jeszcze zatrzymać się nad szczególnym rodzajem języka funkcyjnego – mianowicie nad językiem symbolicznym, specyficznym dla matematyki. W omawianej koncepcji znajdujemy oczywiście wzmianki o istnieniu różnych symboli reprezentujących funkcję i konieczności ich uznawania. Uważam jednak, że należy tej kwestii poświęcić więcej uwagi. Nie tylko ze względu na jej niezwykłą różnorodność w przypadku tego pojęcia (symbole $f(x)$, a_n, symbole macierzy czy przekształceń geometrycznych). Również nie tylko przez to, że często sprawia ona olbrzymie trudności zarówno uczniom (taki skrajny „sposób rozumienia" symboliki funkcyjnej przez uczennicę szkoły średniej szczegółowo analizowałam w (Sajka, 2003)) jak i studentom – przyszłym nauczycielom.

Wspomniałam powyżej o konieczności elastycznego rozumienia pojęcia matematycznego – operacyjnie i strukturalnie. E. Gray i D. Tall (1994) twierdzą, że kluczową rolę w dyskusji nad zależnościami pomiędzy procesem a obiektem odgrywa sposób używania symboli. Na pytanie A. Sfard (1991): „Jak coś może być procesem i obiektem w tym samym czasie?" – odpowiadają, że należy podejrzeć, w jaki sposób radzą sobie z tym problemem profesjonalni matematycy. Bardzo prosto: używają oni tej samej notacji do reprezentowania obu rzeczy – procesu oraz produktu tego procesu. E. Gray i D. Tall zdefiniowali zatem nowe pojęcie *proceptu*, aby określić to połączenie obiektu i procesu reprezentowanych przez ten sam symbol. Symbol staje się więc nierozerwalną częścią skonstruowanego przez nich modelu poznawczego. Piszą oni:

> Sądzimy, że dwuznaczność w interpretowaniu symboliki, poprzez swą elastyczność jest źródłem właściwego myślenia matematycznego. (...)

> Przypuszczamy, że dualne użycie notacji jako procesu i jako obiektu umożliwia lepszą zdolność do „okiełznania procesów matematyki do postaci statycznego opanowania.” Dobry matematyk zamiast borykać się z dualizmem obiektu i procesu rozumie elastycznie symbolikę używaną dla procesu i jego produktu.
>
> (Gray, Tall, 1994, s. 120-121)

Taką wygodną elastyczność w rozumieniu i posługiwaniu się symboliką powinni posiadać przyszli nauczyciele. Co więcej, moim zdaniem powinni oni mieć również pełną świadomość owej dwuznaczności. Rzadko bowiem mówi się o niej otwarcie, gdyż uważa się ją za wstydliwą dla ścisłej i jednoznacznej matematyki. Przyszli nauczyciele powinni zatem znać jej przyczyny. Dopiero wtedy będą mogli właściwie uczyć jej rozumienia i używania.

Opisany tu aspekt wiedzy przedmiotowej o funkcjach można by sformułować jako dodatkowy element koncepcji. Jest on jednak ściśle związany z reprezentacjami pojęcia. Dlatego uważam, że lepiej będzie połączyć omawiane dwa elementy: *różne reprezentacje pojęcia* oraz *rozumienie języków związanych z pojęciem* w jeden element nauczycielskiej wiedzy przedmiotowej.

Ponadto, w związku z uwagami uczynionymi w paragrafach 3.6 oraz 4.6 uważam, że można pominąć element: *wiedza o pojęciu i jego rozumienie*, wyróżniony przez R. Even. Zarówno *wiedza proceduralna i pojęciowa* jak i *obraz pojęcia* zawierają pozostałe elementy wiedzy przedmiotowej o pojęciu i przez nie się ujawniają. Tę tezę potwierdzają podjęte analizy moich badań empirycznych w świetle zmodyfikowanej teorii (M. Sajka, 2005a).

Uważam, że proces formułowania i doskonalenia tej koncepcji został dopiero rozpoczęty. Zapewne wymagać ona będzie dalszych zmian. Przedstawiam zatem wstępną, ogólną próbę modyfikacji koncepcji R. Even[10]. Proponuję wyróżnienie następujących elementów nauczycielskiej wiedzy przedmiotowej:

1. **Istota pojęcia**, czyli znajomość definicji pojęcia i jego genezy, rozumienie zasadniczej „idei” pojęcia oraz jego głównych cech (Dyrszlag, 1978; Even, 1990; Konior, 2002a; Semadeni, 2002a; Sierpińska, 1992; Sfard, 1991).

2. **Reprezentacje i języki związane z pojęciem**, czyli wiedza o reprezentacjach pojęcia oraz rozumienie różnych języków związanych z pojęciem i właściwe nimi operowanie (Even, 1990; Gray, Tall, 1994; Klakla, 2003b; Sierpińska, 1992).

3. **Podstawowy repertuar desygnatów pojęcia**, czyli dysponowanie dostosowanym do poziomu nauczania zestawem desygnatów pojęcia i ich dogłębne rozumienie (Even, 1990; Dyrszlag, 1978).

[10] Elementy nauczycielskiej wiedzy przedmiotowej z zakresu funkcji, wyróżnione w zmodyfikowanej teorii, przedstawiłam w artykułach (Sajka, 2005b; 2005c).

4. **Badanie desygnatów pojęcia**, czyli umiejętność wszechstronnego badania desygnatów pojęcia oraz konstruowania desygnatów pojęcia spełniających określone warunki (Even, 1990; Dyrszlag, 1978; Konior, 2002b).

5. **Siła pojęcia**, czyli wiedza o roli i znaczeniu pojęcia w matematyce oraz umiejętność wykorzystywania tej wiedzy w rozwiązywaniu problemów (Even, 1990; Freudenthal, 1983; Mioduszewski, 1996).

6. **Kultura matematyczna**, czyli:

   (a) znajomość elementów metody matematycznej (Even, 1990; Krygowska, 1977),

   (b) osiągnięcie celów kształcenia z II i III poziomu (Krygowska, 1986; Klakla 2002a; 2002b; 2003a),

   (c) umiejętność samoobserwacji aktywności myślowej (Konior, 1993).

   Te trzy warunki rozważam w zakresie koniecznym do rozwiązywania problemów związanych z pojęciem.

6. Uwagi końcowe

W ostatnich latach możemy zaobserwować wzrost zainteresowania badaczy z dziedziny dydaktyki matematyki osobą nauczyciela – jego przygotowaniem, postawą i rolą w procesie nauczania. Z pewnością warto zapoznać się z konstruowanymi, poddawanymi krytyce i dyskutowanymi obecnie nowymi koncepcjami związanymi z kształceniem nauczycieli matematyki (np. Peressini i inni, 2004; Skott, 2004) lub badającymi wiedzę przedmiotową przyszłych nauczycieli o wybranym pojęciu. Wymienić tu można następujące prace dotyczące pojęcia granicy funkcji i kresu zbioru ograniczonego (Bugajska-Jaszczołt, Treliński, 2002; Przeniosło, 2002; 2004); wartości bezwzględnej (Major, Powązka, 2006) i innych pojęć analizy matematycznej (Powązka, 2005).

Z pewnością warto również podkreślić osiągnięcia polskiej dydaktyki szkoły wyższej – prace J. Koniora (np. 1993), A. Z. Krygowskiej (np. 1965; 1983), B. J. Noweckiego (np. 1981; 1983a; 1983b; 2005), B. J. Noweckiego i E. Urbańskiej (1996), Z. Mosznera (np. 1968; 1973; 1974; 2004), S. Turnaua (np. 2003) i innych – przedstawiające problematykę i koncepcje kształcenia matematycznego nauczycieli, w których można znaleźć również ogólny rys specjalistycznego przygotowania nauczycieli z zakresu przedmiotów kierunkowych.

Konkluzją wypływającą z powyższych rozważań mogą być słowa A. Z. Krygowskiej:

> Wiedza matematyczna daje dydaktykowi i nauczycielowi tylko „surowiec", który musi być poddany przetworzeniu dydaktycznemu. Pierwszym warunkiem umiejętności właściwego przetworzenia tego surowca

> na użytek nauczania jest znajomość jego charakterystycznych cech, które w tym procesie należy mieć na uwadze. (...) Wymaga to nie tylko wiedzy, ale i refleksji nad samą matematyką i matematyczną aktywnością.
>
> (Krygowska, 1977, s. 14)

Literatura

Bugajska-Jaszczołt, B., Treliński, G.: 2002, Badanie rozumienia pojęć matematycznych w szkole średniej i wyższej (na przykładzie granicy funkcji i kresu zbioru ograniczonego), *XVI Szkoła Dydaktyków Matematyki*, CD–ROM.

Dyrszlag, Z.: 1978, *O poziomach i kontroli rozumienia pojęć matematycznych w procesie dydaktycznym*, Studia i Monografie 65 (seria B), WSP w Opolu.

Even, R.: 1990, Subject matter knowledge for teaching and the case of functions, *Educational Studies in Mathematics* **6**, 521-554.

Even, R.: 1993, Subject matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept, *Journal for Research in Mathematics Education* **24**, 94-116.

Freudenthal, H.: 1983, *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Gray, E., Tall, D.: 1994, Duality, ambiguity, and flexibility: a "proceptual" view of simple arithmetic, *Journal for Research in Mathematics Education* **25**(2), 116-140.

Hiebert, J., Lefevre, P.: 1986, Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis, w: J. Hiebert (red.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates Inc., New Jersey, 1-27.

Klakla, M.: 2002a, Kształcenie aktywności matematycznej o charakterze twórczym na poziomie szkoły średniej, w: J. Żabowski (red.), *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, t. III*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock, 263-273.

Klakla, M.: 2002b, Transfer metody, w: J. Żabowski (red.), *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, t. III*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock, 275-298.

Klakla, M.: 2003a, Dyscyplina i krytycyzm myślenia jako specyficzny rodzaj aktywności matematycznej, *Studia Matematyczne Akademii Świętokrzyskiej* **10**, 89-106.

Klakla, M.: 2003b, Формирование творческой математичецкой деятельности учащихся классов с углубленным изучением математики в школах Польши, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock.

Konior, J.: 1993, Samoobserwacja aktywności myślowej studentów na zajęciach z przedmiotów kierunkowych jako element przygotowania do zawodu nauczyciela matematyki (raport na podstawie doświadczeń z pracy ze studentami kolegium nauczycielskiego), *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **15**, 37-55.

Konior, J.: 2002a, Czym jest pojęcie matematyczne (szkic z perspektywy nauczania i uczenia się, w: J. Żabowski (red.), *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, tom IV*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock, 11-30.

Konior, J.: 2002b, Opracowywanie definicji pojęć matematycznych w nauczaniu szkolnym, w: J. Żabowski (red.), *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, tom IV*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock, 31-46.

Krygowska, A. Z.: 1983, Wprowadzenie w problematykę sesji poświęconej koncepcji kształcenia nauczycieli w szkołach wyższych, w: B. Nowecki (red.), *Problemy studiów nauczycielskich 1*, WN WSP, Kraków, 13-22.

Krygowska, Z.: 1965, Założenia konstrukcji i doboru problematyki programu metodyki nauczania matematyki w szkołach wyższych kształcących nauczycieli, *Prace z Dydaktyki Szkoły Wyższej*, Wydawnictwo Naukowe WSP w Krakowie, Kraków, 19-52.

Krygowska, Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 1*, WSiP, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1986, Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **6**, 25-41.

Major, J., Powązka, Z.: 2006, Uwagi dotyczące pojęcia wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **1**, 137-159.

Mioduszewski, J.: 1996, *Ciągłość. Szkice z historii matematyki*, WSiP, Warszawa.

Moschkovich, J.: 2004, Appropriating mathematical practices: A case study of learning to use and explore functions through interaction with a tutor, *Educational Studies in Mathematics* **55**(1-3), 49-80.

Moszner, Z.: 1968, Kształcenie nauczycieli matematyki, *Nowa Szkoła* **7-8**, 26-30.

Moszner, Z.: 1973, O problemach kształcenia nauczycieli na tle doświadczeń Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Krakowie, *Rocznik Naukowo-Dydaktyczny* **46***, WSP w Krakowie w latach 1961-1971*, WN WSP, Kraków, 41-50.

Moszner, Z.: 1974, Czy inna matematyka dla nauczycieli, *Nowa Szkoła* **7-8**, 51-52.

Moszner, Z.: 2004, Refleksje na temat kształcenia nauczycieli matematyki, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **26**, 255-264.

Nowecki, B.: 1981, Przygotowanie z zakresu dydaktyki matematyki na kierunkach nauczycielskich, *Ruch Pedagogiczny* **1**, 180-189.

Nowecki, B.: 1983a, Koncepcja kształcenia nauczycieli w szkołach wyższych. problemy i tezy, w: B. Nowecki (red.), *Problemy studiów nauczycielskich, t. 1*, Wydawnictwo Naukowe WSP, 145-153.

Nowecki, B.: 1983b, Programowe i organizacyjne założenia koncepcji kształcenia nauczycieli w szkołach wyższych, w: B. Nowecki (red.), *Problemy studiów nauczycielskich, t. 1*, Wydawnictwo Naukowe WSP, 33-49.

Nowecki, B. J.: 2005, Koncepcja kształcenia nauczycieli, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **1**, 187-193.

Nowecki, B., Urbańska, E.: 1996, Kształcenie matematyczne i funkcjonowanie w zawodzie nauczycieli klas początkowych w świetle badań ankietowych, w: B. Nowecki (red.), *Problemy Studiów Nauczycielskich 6, Dydaktyka matematyki. O badaniach nad nauczaniem i uczeniem się matematyki*, WN WSP, Kraków, 105-132.

Peressini, D., Borko, H., Romagnano, L., Knuth, E., Willis, C.: 2004, A conceptual framework for learning to teach secondary mathematics: a situative perspective, *Educational Studies in Mathematics* **56**, 67-96.

Powązka, Z.: 2005, Z badań nad wprowadzaniem podstawowych treści analizy matematycznej podczas zajęć na i roku studiów matematycznych, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **1**, 229-295.

Przeniosło, M.: 2002, *Obraz granicy funkcji ukształtowany w czasie studiów matematycznych*, Wydawnictwo Akademii Świętokrzyskiej, Kielce.

Przeniosło, M.: 2004, Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university, *Educational Studies in Mathematics* **55**, 103-132.

Resnick, L. B., Ford, W. W.: 1984, *The Psychology of Mathematics for Instruction*, Lawrence Erlbaum Associates Ltd., London.

Sajka, M.: 2003, A secondary school student's understanding of the concept of function – a case study, *Educational Studies in Mathematics* **53**, 229-254.

Sajka, M.: 2005a, Functional equations as a new tool for researching certain aspects of subject matter knowledge of functions in future mathematics teachers, *Proceedings of the 57th CIEAEM Conf., Piazza Armerina, Italy*, 125-131. Dostępne online: http://math.unipa.it/˜grim/cieaem/cieaem57_sajka.pdf.

Sajka, M.: 2005b, Koncepcja określania nauczycielskiej wiedzy przedmiotowej z zakresu wybranego pojęcia matematycznego – na przykładzie pojęcia funkcji, w: G. Treliński, M. Czajkowska (red.), *Nowe tendencje w kształceniu matematycznym.* W druku.

Sajka, M.: 2005c, What subject matter knowledge about the concept of function should the teacher have?, *Proceedings of the 57th CIEAEM Conf., Piazza Armerina, Italy*, 319-320. Dostępne online: http://math.unipa.it/˜grim/cieaem/cieaem57_sajka_poster.pdf.

Semadeni, Z.: 2002a, Trojaka natura matematyki: idee głębokie, formy powierzchniowe, modele formalne, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **24**, 41-92.

Semadeni, Z.: 2002b, Trudności epistemologiczne związane z pojęciami: pary uporządkowanej i funkcji, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **24**, 119-144.

Sfard, A.: 1991, On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics* **22**, 1-36.

Sierpińska, A.: 1992, On understanding the notion of function, w: E. Dubinsky, G. Harel (red.), *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Vol. 25 of *MAA Notes*, Mathematical Association of America, 25-58.

Skemp, R.: 1971, *The Psychology of Learning Mathematics*, Penguin Books, Harmondsworth, England.

Skott, J.: 2004, The forced autonomy of mathematics teachers, *Educational Studies in Mathematics* **55**, 227-257.

Tall, D., Vinner, S.: 1981, Concept image and concept definition mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics* **12**, 151-169.

Turnau, S.: 2003, Kształcenie nauczycieli matematyki – u nas i gdzie indziej, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **25**, 231-240.

Vinner, S.: 1975, The naive platonic approach as a teaching strategy in arithmetics, *Educational Studies in Mathematics* **6**(3), 339-350.

Vinner, S.: 1983, Concept definition, concept image and the notion of function, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* **14**(3), 293-305.

Instytut Matematyki
Akademia Pedagogiczna
ul. Podchorążych 2
PL- 30-084 Kraków
e-mail: msajka@ap.krakow.pl