FOLIA 231

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia 9(2017)

ISSN 2080-9751
DOI 10.24917/20809751.9.10

Piotr Błaszczyk, Marlena Fila, Kazimierz Mrówka

Wprowadzenie do rozprawy Bernarda Bolzano *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzetes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*

1. Rozprawa Bernarda Bolzano *Rein analytischer Beweis*[1] składa się z długiej *Przedmowy* poświęconej kwestiom metodologicznym oraz części matematycznej podzielonej na osiemnaście paragrafów. Kulminacyjnym punktem całości jest twierdzenie o przyjmowaniu wartości pośrednich (w skrócie IVT) przez wielomiany jednej zmiennej. Twierdzenie to było znane w XVIII wieku i Bolzano wie, że jego dowód nie jest pierwszy; w rozprawie nie chodzi więc o kolejny, ale o szczególny, *czysto-analityczny* dowód. Czytamy: „Przedstawię tu jeden dowód, który [...] zawiera nie tylko potwierdzenie, ale i obiektywne uzasadnienie dowodzonej prawdy, tzn. jest ściśle naukowy”[2]. Co to znaczy? Dlaczego wcześniejsze dowody nie były *naukowe*?

W *Przedmowie* poddano analizie pięć wcześniejszych dowodów IVT, wyróżnionych z uwagi na metodę, są to kolejno: (1) dowód geometryczny oparty na twierdzeniu o *linii ciągłej*, (2) dowód oparty na pojęciu ruchu, (3) dowód związany

*Introduction to a Bernard Bonzalo's Memoir *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzetes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*

[1] B. Bolzano, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzetes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Gottlieb Hasse, Praga 1817. Dalej, z uwagi na długość tytułu będziemy stosować skrót *Rein analytischer Beweis*. Rozprawę cytujemy za: B. Bolzano, *Czysto-analityczny dowód twierdzenia, że między każdymi dwoma wartościami, które dają wyniki przeciwnych znaków, leży jakiś rzeczywisty pierwiastek równania*, tł. M. Fila, w niniejszym tomie; w tym przypadku także będziemy używać skrótu *Czysto-analityczny dowód twierdzenia*.

[2] B. Bolzano, *Czysto-analityczny dowód twierdzenia*, s. 17.

z funkcjami przyjmującymi nieskończone wartości, (4) dowód oparty na błędnym założeniu dotyczącym struktury osi liczbowej, (5) dowód oparty na wnioskach z zasadniczego twierdzenia algebry.

Bolzano nie zwraca szczególnej uwagi na to, czy dowód, który omawia, traktuje o wielomianach czy dowolnych funkcjach. Jego metoda jest taka, że IVT dla wielomianów wynika z IVT dla dowolnej funkcji.

2. Analiza pierwszego dowodu bazuje na scholastycznych dystynkcjach. Bolzano odróżnia matematykę czystą, *ogólną*, do której zalicza arytmetykę, analizę (dzisiaj powiedzielibyśmy: rachunek różniczkowy) i algebrę, od matematyki stosowanej, *specjalnej*, przez co rozumie geometrię. Odpowiednio w matematyce występują dwa rodzaje prawd: ogólne, obejmujące matematykę czystą, i szczegółowe, traktujące o geometrii. Podobne rozróżnienie dotyczy rozumowań, które są dzielone na ogólne i szczegółowe. Pierwsze dotyczą matematyki czystej i tyczą się prawd ogólnych, drugie dotyczą geometrii i traktują o prawdach szczegółowych.

Przywołując autorytet Arystotelesa Bolzano przekonuje, że rozumowań ogólnych i szczegółowych nie wolno łączyć. Czytamy: „nie należy łamać zasady, iż prawd matematyki czystej, czy ogólnej, to jest prawd arytmetyki, algebry, analizy, nie należy wyprowadzać z rozważań, które należą jedynie do matematyki stosowanej, lub specjalnej, czyli geometrii. Czyż nie jest tak, że od dawna czuliśmy i przyjmowaliśmy, że niewłaściwe jest *przechodzenie z jednego rodzaju do innego*?”[3]. Arystoteles zaś pisał wprost: „nie można w dowodzeniu przejść z jednego rodzaju do innego, na przykład dowieść tego geometrycznego arytmetycznie”[4].

Podział na arytmetykę i geometrię był u Arystotelesa związany z podziałem na liczby naturalne (to, co *dyskretne*) oraz obiekty geometryczne (to, co *ciągłe*)[5]. Bolzano powtarza ten argument pisząc: „prawdziwie naukowe dowody (...), które stosują się do wszystkich wielkości, zarówno tych w przestrzeni, jak i innych, nie mogą wynikać z prawd, które stosują się jedynie do wielkości w przestrzeni”[6]. Jednak od czasu *Geometrii* Kartezjusza, gdy teoria proporcji została zastąpiona arytmetyką, scholastyczny podział liczba *vs* wielkość stracił znaczenie: liczba nie była już wyłącznie liczbą naturalną (tak, jak w matematyce greckiej), ale stała się elementem ciała uporządkowanego[7].

Podział prawd matematycznych na ogólne i szczegółowe doprowadził Bolzano do dwóch wersji twierdzenia IVT: dla linii oraz dla funkcji. W pierwszym przypadku używa pojęć *odcięta, rzędna*, w drugim – *wielkość*, *wartość*; ciągłość linii oddaje słowem *kontinuierlich*, ciągłość funkcji – *stetigkeit*. Twierdzenie w wersji geometrycznej jest tak formułowane: „każda linia ciągła o zwykłej krzywiźnie, której rzędne są najpierw dodatnie, a później ujemne (lub odwrotnie), musi ko-

[3] Ibidem, s. 12.

[4] Arystoteles, *Analityki Wtóre*, 1,7,75 a, w: I. Bekker (ed.), *Aristotelis Opera*, Georg Reimer, Berlin 1831, tł. P. Błaszczyk, K. Mrówka.

[5] Zob. „Ilość jest dyskretna, albo ciągła. Ponadto, pewne ilości są takie, iż każda część całości ma jakieś położenie względem innych, inne zaś nie są złożone z części, które mają położenie. Przykładami ilości dyskretnej jest liczba i mowa, zaś ciągłej są linie, powierzchnie, bryły, a prócz tego czas i miejsce”, Arystoteles, *Kategorie*, 6.4 b, w: I. Bekker (ed.), *Aristotelis Opera*, *op. cit.*, tł. P. Błaszczyk, K. Mrówka.

[6] B. Bolzano, *op. cit.*, s. 13.

[7] Zob. P. Błaszczyk, K. Mrówka, *Kartezjusz, Geometria. Tłumaczenie i komentarz*, Universitas, Kraków 2015, s. 145–166.

niecznie przeciąć oś odciętych w punkcie leżącym między tymi rzędnymi”[8]. W wersji dla funkcji brzmi tak: „jeżeli dwie funkcje ciągłe zmiennej x, fx i φx, mają tę własność, że dla $x = \alpha$ jest $f\alpha < \varphi\alpha$, a dla $x = \beta$ jest $f\beta > \varphi\beta$, to zawsze musi być jakaś wartość x leżąca między α i β, dla której zachodzi $fx = \varphi x$”[9], lub w wersji dla jednej funkcji: „między dwoma wartościami, α i β, które dają wyniki przeciwnych znaków, zawsze istnieje jakiś rzeczywisty pierwiastek”[10] funkcji ciągłej f.

IVT w wersji geometrycznej jest *prawdą szczegółową*, w wersji dla funkcji – *prawdą ogólną*; z prawdy ogólnej można wyprowadzać szczegółową, ale nie na odwrót. W związku z tym Bolzano pisze: „Rozważmy teraz obiektywną podstawę, dla której linia w wyżej wymienionych okolicznościach przecina oś odciętych. Każdy zapewne szybko przyzna, że podstawa tego leży nie gdzie indziej, jak w ogólnej prawdzie, że każda funkcja ciągła, która jest dodatnia dla jednej wartości x i ujemna dla drugiej, musi być zerem dla pewnej wartości pośredniej x. Ale to jest właśnie ta prawda, która ma być tu udowodniona. Dlatego nie można pozwolić, by została ona wyprowadzona z pierwszej [...]. Raczej odwrotnie, pierwsza musi wynikać z drugiej jeśli chcemy reprezentować prawdy naukowe w taki sam sposób, w jaki są one ze sobą obiektywnie połączone”[11].

Oczywistość twierdzenia o linii wynika – jest pisze Bolzano – z prawdy ogólnej, czyli twierdzenia o funkcji. Zatem dowód IVT dla funkcji nie może opierać się na twierdzeniu geometrycznym.

2.1. U Bolzano obiekty geometryczne są charakteryzowane bardzo niekompletnie. Ale podobnie jest u przedstawicieli ruchu nazywanego „arytmetyzacją analizy”, Cantora czy Dedekinda, którzy także deklarowali, że chcą wyeliminować argumenty geometryczne z analizy. Z perspektywy XX wieku można to tak ocenić: proces arytmetyzacji analizy został w pełni zrealizowany dopiero wtedy, gdy za podstawę przyjęto analityczne rozumienie funkcji, a linia została pojęta jako wykres, czyli reprezentacja funkcji.

Zobaczmy dokładnie, jak przedstawia się dwoistość geometryczne-analityczne w rozprawie Bolzano[12]. Po pierwsze, ani linia, ani funkcja nie są zdefiniowane. Po drugie, twierdzenie IVT w wersji geometrycznej traktuje o linii ciągłej, ale ciągłość linii, w odróżnieniu od ciągłości funkcji, nie została zdefiniowana. Dalej, Bolzano pisze, że prawdziwość IVT w wersji geometrycznej „leży nie gdzie indziej, jak w ogólnej prawdzie, że każda funkcja ciągła...”. To zdanie kryje jednak założenie, że każdą linię ciągłą można reprezentować jakąś funkcją ciągłą – nie jest to bynajmniej oczywiste. Nie wiadomo nawet, jaką funkcję przyjąć w tak prostym przypadku, jak krzywa zamknięta, powiedzmy okrąg czy elipsa, która przecina oś odciętych[13]. O ile więc zgodzimy się, że IVT w wersji dla funkcji nie może być

[8] B. Bolzano, *op. cit.*, s. 12.

[9] Ibidem, s. 28.

[10] Ibidem, s. 11.

[11] Ibidem, s. 13.

[12] Jak to jest u Cantora pokazujemy w P. Błaszczyk, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda* Stetigkeit und irrationale Zahlen, Wydawnictwo Naukowe AP, Kraków 2007, s. 126–127; jak to jest u Dedekinda zob. *op. cit.*, s. 28–32.

[13] Euler pojmował funkcję jako funkcję wielowartościową we współczesnym rozumieniu i być może Bolzano podobnie rozumiał funkcję.

wnioskiem z twierdzenia IVT dla linii, to trudno uznać, że drugie twierdzenie wynika z pierwszego, bo w istocie nie wiadomo, o czym traktuje twierdzenie IVT w wersji geometrycznej.

2.2. W wyodrębnionej na końcu *Przedmowy* części znajdujemy pewne ogólniejsze rozważania na temat metody aksjomatycznej. Bolzano odróżnia aksjomaty, *prawdy podstawowe*, od zdań, które wynikają z aksjomatów, *prawd wynikających.* W tym kontekście tak pisze o geometrycznej wersji IVT: „Łatwo widać, że jej pojęcia składowe są tak powiązane, iż bez wahania powiemy, że nie może być ona jedną z tych prawd prostych, które nazywamy prawdami podstawowymi, czy aksjomatami, ponieważ stanowią one podstawę innych prawd, a same nie wynikają z innych. Wręcz przeciwnie, jest to twierdzenie, czy prawda wynikająca, czyli taka prawda, która musi być wyprowadzona z innych prawd, bo ma podstawę w pewnych innych prawdach”[14].

Bolzano opowiada się za metodą aksjomatyczno-dedukcyjną. Dowód *ściśle naukowy* jest dlań *uzasadnieniem*, *przedstawieniem obiektywnych racji.* W istocie jest to jednak scholastyczne podejście oparte na odróżnieniu istoty i przypadłości. Najpierw pokazuje się, że muszą istnieć prawdy, które nie mają dowodu. Arystoteles tak to tłumaczy: „twierdzimy, że nie cała wiedza jest dowodzona, przeciwnie, znajomość przesłanek pierwszych jest niezależna od dowodu, a konieczność tego jest oczywista; jeśli bowiem musimy poznać te pierwsze, z których wyprowadza się dowód, zaś cofanie musi mieć koniec w tych bezpośrednich, to muszą być one niedowodliwe”[15]. Następnie zaś, prawdy pierwsze są przyjmowane na podstawie wglądu w istotę.

Motyw poznania istoty przedmiotu, który istnieje poza językiem, poza systemem aksjomatów, definicji i twierdzeń, znajdujemy w następującym zdaniu: „jeśli chcemy reprezentować prawdy naukowe w taki sam sposób, w jaki są one ze sobą obiektywnie połączone”[16].

Metoda aksjomatyczna zapoczątkowana w XX wieku przez Hilberta, wyróżnia pojęcia pierwotne i aksjomaty, ale nie w oparciu o wgląd w istotę rzeczy, lecz o kryteria metamatematyczne: niezależność i niesprzeczność aksjomatów.

Gdy spojrzymy na rozprawę Bolzano z punktu widzenia współczesnej metody aksjomatycznej to ma ona taką oto strukturę: Tytułowe twierdzenie IVT dla wielomianów jest dowodzone w oparciu o IVT dla dowolnej funkcji ciągłej (§15) i twierdzenie o tym, że wielomian jest funkcją ciągłą (§17). Ciągłość wielomianu jest dowodzona na podstawie sformułowanej w pracy definicji ciągłości funkcji (*Przedmowa*, IIa). Dowód IVT dla dowolnej funkcji ciągłej oparty jest na zasadzie supremum (§12). Zasada supremum dowodzona na mocy założenia, że każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego posiada granicę (§5). W całej rozprawie w sposób niejawny przyjmowany jest aksjomat Archimedesa i to w kilku różnych wersjach.

Mając na uwadze stosowanie zasady supremum, można przyjąć, że twierdzenie Bolzano traktuje o funkcjach rzeczywistych[17]. Przyjmując dalej współczesną

[14] B. Bolzano, *op.cit.*, s. 13.

[15] Arystoteles, *Analityki wtóre*, 72 b, w: I. Bekker (ed.), *Aristotelis Opera*, *op. cit.*, tł. P. Błaszczyk, K. Mrówka.

[16] B. Bolzano, *op. cit.*, s. 13.

[17] Jest to szczegółowo wykazane w artykule: M. Fila, *Aksjomat ciągłości w rozprawie Bernarda Bolzana* Rein analytischer Beweis, w niniejszym tomie.

perspektywę, widzimy, że zasadę supremum (ZS) dowodzi Bolzano w oparciu o zupełność w sensie Cauchy'ego (ZC). Wiadomo jednak, że ZC dopiero w koniunkcji z aksjomatem Archimedesa (AA) jest równoważna ZS. Dalej wiadomo, że twierdzenie IVT w odniesieniu do funkcji ciągłej jest jeszcze jedną wersją aksjomatu ciągłości, czyli nie tylko z ZC+AA wynika IVT dla funkcji, ale i odwrotnie, z IVT dla funkcji wynika ZC+AA[18]. Więcej, naczelnym celem rozprawy Bolzano jest nie tyle IVT dla funkcji, ile IVT dla wielomianu, a to twierdzenie zachodzi nie tylko dla wielomianów rzeczywistych, ale jest prawdziwe w ciałach rzeczywiście domkniętych; ciała te mogą to być niearchimedesowe (jak niestandardowe liczby rzeczywiste), mogą być także podciałami liczb rzeczywistych, jak liczby algebraiczne[19].

2.3. W ostatniej części *Przedmowy* znajdujemy uwagi Bolzano na temat rozległego systemu obejmującego – jak można wnosić – całość matematyki, a nie tylko jej wyróżniony fragment, jak na przykład aksjomaty liczb rzeczywistych. Czytamy: „Nie należy oczekiwać, że zostaną tu prześledzone wszystkie zasady budowanego przeze mnie prawdziwego wykładu naukowego opisane w *Beyträgen zu einer begründeteren i.t.d* (*Przedmowa*, IIa.). Będę wciąż przekonywał o całkowitej prawdziwości tych zasad; dokładność ich obowiązywania jest taka sama tylko tam, gdzie to możliwe, gdzie wykład naukowy rozpoczyna się od zdań podstawowych i pojęć; ale nie tam, gdzie po prostu niektóre jego nauki traktuje się w kontekście całości, jak to się dzieje tutaj"[20].

Bolzano więc zdawał sobie sprawę z tego, że jego praca nie spełnia wymogów metody aksjomatycznej. Nie ma w niej bowiem ani wyróżnionych pojęć pierwotnych, ani aksjomatów. Tłumaczy to jednak tym, że rozprawę *Rein analytischer Beweis* należy ujmować w kontekście innych prac, a nie jako samodzielny wykład: „Poglądy obejmujące całe obszary jednej lub kilku nauk mogą być poznane na dwa sposoby: mogą być podane raz w ostatecznej rozprawie albo prezentowane stopniowo w kolejnych pracach"[21]. Bolzano opowiada się za drugim sposobem przedstawiania wyników badań, a praca *Rein analytischer Beweis* ma być jednym z dokumentów składających się na kompletną teorię. Czytamy: „I jeśli po wielu poprawkach będzie mi dane zostać wyróżnionym spośród części społeczeństwa, tylko wtedy należy rozważyć złożenie całego systemu"[22].

3. Drugi z analizowanych dowodów pochodzi od Lagrange'a. Zacytujemy kluczowy fragment pracy, do której odnosi się Bolzano:

„Przedstawmy ogólnie proponowane równanie jako $P - Q = 0$, gdzie P jest sumą wszystkich wyrazów, które mają znak plus, zaś Q, sumą wszystkich tych, które mają znak minus. Przyjmijmy wpierw, że dwie liczby p i q są dodatnie i że q jest większe od p. Przyjmując dalej $x = p$, mamy $P - Q < 0$, przyjmując $x = q$, mamy $P - Q > 0$. Jest jasne, że w pierwszym przypadku P będzie $< Q$,

[18] Zob. P. Błaszczyk, *A purely algebraic proof of the fundamental theorem of algebra*, Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia 8, 2016, 5–21.

[19] Zob. ibidem.

[20] B. Bolzano, *op. cit.*, s. 17, przypis 16.

[21] Ibidem, s. 18.

[22] Ibidem, s. 19.

a w drugim P będzie $> Q$. Zatem, z postaci wielkości P i Q, które zawierają tylko wielkości dodatnie oraz potęgi całkowite i dodatnie, wynika w sposób oczywisty, że wielkości te wzrastają koniecznie w miarę jak wzrasta x, a zwiększając x przez wszystkie niewidoczne stopnie, od p do q, wzrastają one również przez stopnie niewidoczne, ale w ten sposób, że P wzrośnie bardziej niż Q, ponieważ im mniejszą była, tym większą się staje. Tak więc koniecznie będzie musiał być wyraz między dwiema wartościami p i q, gdzie P będzie równe Q, tak jak dwa poruszające się ciała, o których zakłada się, że poruszają się po tej samej linii w tym samym kierunku, i które, wyruszając jednocześnie z dwóch różnych punktów, docierają w tym samym czasie do dwóch innych punktów, ale w ten sposób, że ten, który był wpierw z tyłu, znajduje się następnie przed drugim, muszą koniecznie spotkać się na swej drodze. Wartość x, która uczyni P równym Q, będzie więc jednym z pierwiastków równania, i znajdzie się między wartościami p i q. Tak samo, jeśli przyjmiemy $x = p$, otrzymamy $P - Q > 0$, a gdy przyjmiemy $x = q$, to otrzymamy $P - Q < 0$; w pierwszym wypadku otrzymamy więc $Q < P$, a w drugim $Q > P$; a zwiększając x od p aż do q, wielkość Q wzrośnie bardziej niż wielkość P, i zrówna się z nią w punkcie między p i q"[23].

Bolzano streszcza ten dowód jednym zdaniem po czym pisze: „Jest to dalej ilustrowane przykładem ruchu dwóch ciał, z których jedno najpierw jest za drugim, a następnie przed nim. Stąd ma wynikać, że w pewnym momencie będą one musiały się minąć"[24].

Twierdzenie Lagrange'a traktuje o wielomianie zapisanym w postaci $P - Q$, Bolzano zaś przyjmuje, że chodzi o dowolną funkcję ciągłą w postaci $f - \varphi$. Dowód Lagrange'a w istocie powołuje się na słynny paradoks Achillesa. To znaczące odwrócenie: podczas gdy współcześnie rozwiązujemy paradoks Achillesa na podstawie twierdzenia IVT, to Lagrange przywołuje sytuację opisaną w paradoksie, aby udowodnić twierdzenie IVT[25].

Bolzano jasno ocenia dowód oparty na pojęciu ruchu: przykład z ruchem „sam w sobie nie dowodzi twierdzenia, a raczej służy temu, by twierdzenie zostało udowodnione"[26]. W tym kontekście podaje definicję ciągłości funkcji: to, że „funkcja fx zmienia się zgodnie z prawem ciągłości dla wszystkich wartości x wewnątrz lub na zewnątrz pewnych granic oznacza po prostu, że jeżeli x jest jakąś wartością, to różnica $f(x+\omega) - fx$ może stać się mniejsza niż każda dana wielkość pod warunkiem, że ω może być dowolnie mała. Czyli $f(x+\omega) = fx + \Omega$"[27].

W tradycji scholastycznej przyjmowano Arystotelesa rozumienie ciągłości: „ciągłe jest podzielne na części dalej podzielne". Odnosiło się ono i do ruchu, i do czasu, i do przestrzeni[28]. Innymi słowy, w tradycji, w której wyrastał Bolzano

[23] J. L. Lagrange, *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*, Courcier, Paris 1808, s. 98–99, tł. P. Błaszczyk, K. Mrówka.

[24] B. Bolzano, *op. cit.*, s. 13.

[25] Zob. P. Błaszczyk, *Ciągłość versus kontinuum. Rewizja stanowiska Zenona i jego współczesnych krytyków*, w: I. Bondecka-Krzykowska, J. Pogonowski (eds.), *Światy matematyki. Tworzenie czy odkrywanie? Księga Jubileuszowa ofiarowana Panu Profesorowi Romanowi Murawskiemu*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2010, 107–121.

[26] B. Bolzano, *op. cit.*, s. 14.

[27] Ibidem, s. 14.

[28] Zob. P. Błaszczyk, K. Mrówka, *Euklides i Arystoteles o ciągłości. Część I. Euklides*, Filozofia Nauki 21, 2013, 91–115.

czas i ruch były ciągłe w tym samym sensie. W rozprawie *Rein analytischer Beweis* ciągłość jest definiowana jako ciągłość funkcji, ciągłość czasu i przestrzeni jako ciągłość liczb rzeczywistych. Bolzano nie jest do końca świadom wagi tego rozstrzygnięcia, już chociażby dlatego, że zasada supremum, czy zupełność w sensie Cauchy'ego, nie są jasno przedstawiane jako własność porządku liniowego. Tym niemniej można przyjąć, że rok 1817 jest przełomowy dla matematycznego rozumienia ciągłości: od tego czasu ciągłość jest odnoszona albo do funkcji, albo do porządku liniowego i w każdym z tych przypadków jest inaczej definiowana.

4. Jako trzecie omawiane jest twierdzenie: „Każda zmienna wielkość może przejść ze stanu dodatniego do ujemnego przez stan zero lub nieskończoność"[29]. Bolzano pokazuje, jak wyeliminować z tej wersji pojęcie „przejścia" i sprowadzić ją do postaci czysto matematycznej: „Jeżeli zmienna wielkość, która zależy od zmiennej x, jest dodatnia dla $x = \alpha$ i ujemna dla $x = \beta$, to zawsze istnieje wartość x leżąca między α i β, dla której osiągana jest wielkość zero lub nieskończoność"[30].

Przypadki, w których funkcja przyjmuje nieskończone wartości, odnoszą się – przyjmując współczesną perspektywę – do punktów, w których nie jest ona określona. Bolzano, nie dysponując jasną definicją, wiąże funkcję ze wzorem, formułą; stąd zaś wynikają rozważania, które z perspektywy funkcji pojętej jako zbiór par uporządkowanych są dość osobliwe.

Tak więc zdaniem Bolzano, funkcje przyjmujące nieskończone wartości nie spełniają założenia ciągłości. Czytamy: „jeśli ograniczymy twierdzenie do wielkości, które różnią się w sposób ciągły, musimy również wykluczyć te funkcje, które stają się nieskończone dla pewnych wartości swych pierwiastków"[31]. Aby to wykazać, przywołuje podaną wcześniej definicję i pisze: „Funkcja taka jak $\frac{a}{b-x}$ w rzeczywistości nie zmienia się w sposób ciągły dla wszystkich wartości x, tylko dla tych, które są $>$ lub $< b$. Zatem dla wartości $x = b$ nie ma żadnej określonej wartości, ale funkcja staje się wtedy nieskończenie duża. Nie możemy więc powiedzieć, że wartości, jakie przyjmuje funkcja dla $x = b+\omega$, wszystkie są znane i mogą podejść do wartości $x = b$ tak blisko, jak tylko się chce"[32]. Innymi słowy, nie jest spełniony warunek $f(b+\omega) = fb + \Omega$, gdzie ω oraz Ω są dowolnie małe. Wartość $f(b+\omega)$ jest – możemy dopowiedzieć – liczbą skończoną, zaś $f(b) + \Omega$ – nieskończoną.

Krótko: przypadek III wynika z niejasnej definicji funkcji.

5. Jako kolejny dowód twierdzenia IVT rozważana jest teza: „Ponieważ fx jest dodatnia dla $x = \alpha$ i ujemna dla $x = \beta$, to muszą być między α i β dwie wielkości a i b, w których przejście od wartości dodatnich do ujemnych fx odbywa się tak, że między a i b nie ma więcej wartości x, dla których fx nadal byłaby dodatnia albo ujemna"[33].

Bolzano jest przekonany o błędności ukrytego tu założenia i pisze, że „funkcja ciągła nie ma ostatnich x, dla których jest ona dodatnia i nie ma pierwszych, dla których jest ujemna"[34]. Uzasadnienie jest następujące: „Dobrze wiadomo,

[29] B. Bolzano, *op. cit.*, s. 15.
[30] Ibidem, s. 15.
[31] Ibidem, s. 15.
[32] Ibidem, s. 15.
[33] Ibidem, s. 16.
[34] Ibidem, s. 16.

że między dwoma bliskimi wartościami zmiennej niezależnej, na przykład pierwiastka mi x pewnej funkcji, zawsze jest przyjmowanych nieskończenie wiele wartości pośrednich. W ten sam sposób funkcja ciągła [...] nie ma żadnych liczb a i b, które tutaj opisano"[35].

Pierwsze zdanie traktuje o gęstości osi liczbowej. Z gęstości nie wynika jednak zdanie drugie. W istocie potrzebny byłby dowód tak zwanej zasady zachowania znaku: jeżeli $f(x_0) > 0$, to istnieje taki przedział otwarty U, że $x_0 \in U$ oraz dla każdego x należącego do U zachodzi $f(x) > 0$. Zasada ta, acz w trochę innej postaci, jest wprost przywołana w rozprawie[36].

6. Dużo uwagi poświęca Bolzano dowodowi opartemu na zasadniczym twierdzeniu algebry. Dokładniej, chodzi o następujący wniosek: Każdy wielomian rozkłada się na wielomiany co najwyżej drugiego stopnia (FW). Bolzano pisze: „Nie ma wątpliwości, że jeśli ostatnie twierdzenie [czyli FW] jest poprawne, to poprzednie [czyli IVT] można z niego wywnioskować". W tym punkcie więc wyraźnie chodzi o IVT dla wielomianu.

Bolzano wskazuje na popełniany tu błąd metodologiczny: „drugie twierdzenie [FW] jasno wyraża prawdę bardziej złożoną niż pierwsze [IVT]. Dlatego drugie z pewnością może być oparte na pierwszym, ale nie odwrotnie – pierwsze na drugim"[37].

Analizując dowód zasadniczego twierdzenia algebry, podany przez Gausa w roku 1799, Bolzano pisze[38]: „Wyraźnie odnosi się on do naszego twierdzenia, kiedy zakłada [...] *równanie nieparzystego stopnia jest z pewnością rozwiązalne*; dobrze wiadomo, że twierdzenie to jest prostym wnioskiem z naszego twierdzenia"[39]. W związku z dowodem podanym przez Gaussa w roku 1816 zauważa: „Opiera się m.in. na następującym twierdzeniu: Jeżeli funkcja ma wartości dodatnie dla wszystkich zmiennych wielkości x leżących między α i β, to jej całka od $x = \alpha$ do $x = \beta$ ma dodatnie wartości. W dowodzie tego twierdzenia podanym przez pana Lagrange'a nie znajdujemy co prawda wyraźnego odwołania do naszego twierdzenia, ale dowód Lagrange'a nadal ma luki"[40].

Dalej analizowany jest dowód Lagrange'a:

„Wymagane jest w nim przyjąć wielkości i tak małe, by

$$\frac{f(x+i) - fx}{i} - f'x < \frac{f'x + f'(x+i) + f'(x+2i) + ... + f'(x+(n-1)i)}{n},$$

gdzie iloczyn $i \cdot n$ pozostaje równy pewnej danej wielkości, a dobrze znane oznaczenie $f'x$ przedstawia pierwszą pochodną funkcji fx. Teraz pojawia się pytanie: czy można spełnić ten wymóg? Jakkolwiek małe i przyjmiemy, aby zmniejszyć różnicę

$$\frac{f(x+i) - fx}{i} - f'x,$$

[35] Ibidem, s. 16.

[36] Zob. niżej pkt. 7(a).

[37] B. Bolzano, *op. cit.*, s. 16.

[38] Gauss podał cztery dowody zasadniczego twierdzenia algebry, kolejno w latach 1799, 1816 (dwa dowody) i w 1848.

[39] B. Bolzano, *op. cit.*, s. 16.

[40] Ibidem, s. 16.

to dzielnik prawej strony, n, musi stać się większy, jeżeli $i \cdot n$ pozostanie stałe. Ponadto zwiększenie zbioru wyrazów w liczniku spowoduje zwiększenie wartości jego mianownika; można też pokazać, że wartość całego ułamka zmniejsza się wraz ze zmniejszaniem i, tak samo lub bardziej niż wyrażenie

$$\frac{f(x+i)-fx}{i} - f'x,$$

co samo jest jeszcze do udowodnienia. Ta luka powinna zostać wypełniona, a to zapewne można zrobić jedynie w oparciu o nasze obecne twierdzenie, ponieważ wspomniany już dowód Lagrange'a, choć znacznie prostszy, musi się do niego odnosić"[41].

Konkluzja Bolzano nie jest jednak tak jednoznaczna, jak w poprzednich przypadkach: „Ta luka powinna zostać wypełniona, a to zapewne można zrobić jedynie w oparciu o nasze obecne twierdzenie"[42].

Faktem natomiast jest, że Lagrange *implicite* stosuje twierdzenie o zachowaniu znaku. Odnosząc się do liczb

$$f'(x),\ f'(x+i),\ f'(x+2i), ..., f'(x+(n-1)i)$$

pisze bowiem: „Zatem, jeśli wszystkie te ostatnie wielkości są tego samego znaku, to znaczy, wszystkie pozytywne lub wszystkie negatywne, to łatwo stwierdzić..."[43].

7. Kończąc *Przedmowę* Bolzano streszcza część matematyczną swojej rozprawy. Twierdzenie IVT dla wielomianu będzie przedstawione jako wniosek z *ogólniejszej prawdy*: „jeżeli dwie funkcje ciągłe zmiennej x, fx i φx, mają tę własność, że dla $x = \alpha$ jest $f\alpha < \varphi\alpha$, a dla $x = \beta$ jest $f\beta > \varphi\beta$, to zawsze musi być jakaś wartość x leżąca między α i β, dla której zachodzi $fx = \varphi x$"[44]. Przypomnijmy więc, że IVT dla wielomianów zachodzi w klasie ciał rzeczywiście domkniętych, gdzie twierdzenie IVT dla dowolnej funkcji ciągłej nie jest prawdziwe. Mając na uwadze ten fakt, IVT dla funkcji nie jest więc *ogólniejszą prawdą*.

Kluczowe lematy rozprawy – w relacji Bolzano – są następujące:

(a) zasada zachowania znaku zastosowana do funkcji $f - \varphi$: „Jeśli $f\alpha < \varphi\alpha$, to na mocy prawa ciągłości jest $f(\alpha+i) < \varphi(\alpha+i)$, gdy tylko i jest wystarczająco małe",

(b) zasada supremum: „gdy pewna własność M przysługuje wszystkim wartościom zmiennej wielkości i, które są mniejsze od pewnej wielkości danej, ale nie dla wszystkich wartości w ogóle, to zawsze jest jakaś największa wartość u, o której można pokazać, że wszystkie i, które są $< u$ mają własność M",

(c) dla u spełniającego warunek $u = \sup\{i > 0 : (f-\varphi)(\alpha+i) < 0\}$ zachodzi $(f-\varphi)(\alpha+u) = 0$: „Dla tej wartości u nie może być $f(\alpha+u) < \varphi(\alpha+u)$ [...] Tym bardziej nie może być prawdą, że $f(\alpha+u) > \varphi(\alpha+u)$ [...] Musi zatem być $f(\alpha+u) = \varphi(\alpha+u)$, tj. istnieje wartość x leżąca między α i β, mianowicie $\alpha+u$, dla której funkcje fx i φx są sobie równe",

[41] Ibidem, s. 16.
[42] Ibidem, s. 16.
[43] J. L. Lagrange, *Leçons sur le Calcul des Fonctions*, nowe wydanie, Courcier, Paris 1806, s. 91, tł. P. Błaszczyk, K. Mrówka.
[44] B. Bolzano, *op. cit.*, s. 17.

(d) dowód zasady supremum: „Pozostaje już tylko kwestia wspomnianego dowodu. Twierdzenie udowodnimy, pokazując, że te wartości i, o których można pokazać, że wszystkie mniejsze od nich posiadają własność M i te, o których nie można tego pokazać mogą być umieszczone tak blisko siebie, jak tyko chcemy. Dlatego każdy, kto ma poprawne pojęcie wielkości, uzna największe i, o którym można pokazać, że wszystko wielkości poniżej niej mają własność M za właściwą, tj. prawdziwa wielkość".

W punktach (a)–(c) dowód Bolzano pokrywa się z klasycznym dowodem twierdzenia IVT dla funkcji ciągłej[45]. W punkcie (d) Bolzano chce udowodnić to, co współcześnie przyjmujemy jako aksjomat. Ciekawe jest prześledzić to zmaganie. Wiemy, że IVT dla funkcji ciągłej jest równoważne zasadzie supremum, oceniając rozprawę Bolzano z perspektywy metodologicznej, popełnia on więc błąd, który wskazywał w *Przedmowie*, analizując inne prace. Na czym zatem polega wkład *Rein analytischer Beweis* w rozwój matematyki? Szukając *pierwszych prawd*, formułując zasadę supremum czy zupełność w sensie Cauchy'ego, Bolzano zainicjował proces, którego zwieńczeniem jest współczesna aksjomatyka liczb rzeczywistych.

8. W roku 1799 Gauss opublikował rozprawę doktorską *Demonstratio nova Theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse.* Praca zawiera pierwszy z czterech jego dowodów zasadniczego twierdzenia algebry. W rozbudowanym wstępie młody, 22-letni doktorant szczegółowo analizuje wcześniejsze dowody, wskazując błędy m.in. w pracach Eulera i Lagrange'a a polegające na przyjmowaniu dowodzonej tezy w jakieś innej postaci, na przykład w takiej, że wielomian n-tego stopnia ma n pierwiastków. Bolzano w *Rein analytischer Beweis* wyraźnie naśladuje Gaussa: analizowane przez niego dowody zakładają twierdzenie o przyjmowaniu wartości pośredniej w jakiejś innej postaci. Ale między tymi pracami jest jeszcze jedno, ważniejsze nawet podobieństwo. Podejście Gaussa różni się od poprzednich tym, że jego dowód jest egzystencjalny: wykazuje istnienie pierwiastków, ale ich nie konstruuje. Dowód podany przez Bolzano także jest egzystencjalny: jakkolwiek pokazuje, że $(f - \varphi)(\alpha + u) = 0$, to u jest wyznaczone na mocy zasady supremum. Gauss i Bolzano otworzyli więc matematykę na nowy rodzaj dowodów – dowody o istnieniu obiektu spełniającego dane warunki, bez wskazania jego konstrukcji.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail piotr.blaszczyk@up.krakow.pl
e-mail marlena-fila@wp.pl

[45]Zob. P. Błaszczyk, *A purely algebraic proof of the fundamental theorem of algebra*, *op. cit.*, s. 8–9.

Instytut Filozofii i Socjologii
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail kazimierzmrowka@gmail.com